مثلثات

تهیه و ترتیب: انجنیر محمد امین محمدی

این چپتر برای دانش آموزان مکاتب آماده شده است.

بسم الله الرحمن الرحیم

مثلثات

(Trigonometry)

در زبان یونانی زاویه را Gonia (گونیا) میگویند و Tri به معنی سه است. به این ترتیب Trigon به معنی مثلث میباشد. Metron به معنی اندازه گرفتن است و از ترکیب Trigon و Metron اصطلاح Trigonometry یعنی مثلثات بوجود آمده است.

مثلثات بخشی از ریاضیات است که از اضلاع، زوایا و از روابط بین اضلاع و زوایای مثلث بحث میکند.

هدف اساسی علم مثلثات اندازه گیری غیر مستقیم طول ها است که توسط اندازه گیری مستقیم امکان پذیر نیست ویا مشکل است.

همچنان از مثلثات در نجوم، دریانوردی، فزیک، نقشه برداری، حل معادلات الجبری نیز استفاده میشود.

زاویه یا Angle: زاویه عبارت از شکلی است که از دوران یک نیم خط به اطراف مبدأ خودش بوجود می آید و اندازهٔ آن مربوط به دوران آن است.

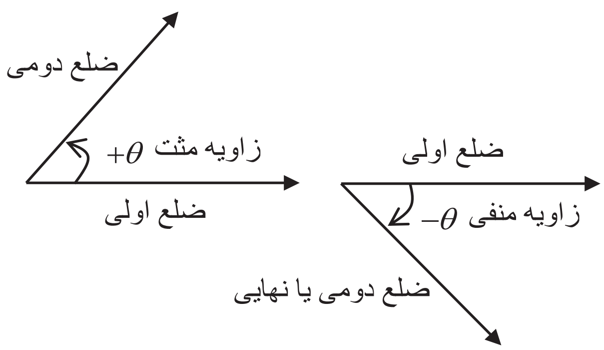
در هندسه، زاویه تنها دارای مقدار است اما در مثلثات زاویه دارای مقدار و جهت میباشد و جهت زاویه به علامه های مثبت و منفی نشان داده میشود.

زاویه مثبت: اگر جهت دوران بر خلاف جهت حرکت عقربهٔ ساعت باشد زاویه مثبت گفته میشود.

زاویه منفی: اگر جهت دوران هم جهت حرکت عقربهٔ ساعت باشد زاویه منفی گفته میشود.

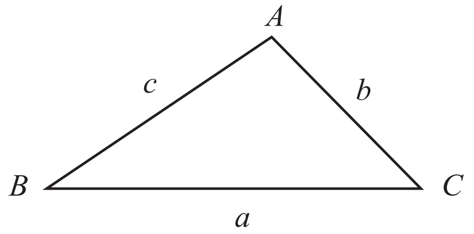
ضلعی که دوران از آن شروع میشود ضلع اولی و ضلعی که دوران به آن ختم میشود ضلع نهایی یا ضلع دوم نامیده میشود.

قرار شکل:



مثلث: شکلی که توسط سه قطعه خط محدود شده باشد مثلث گفته میشود.

هر مثلث دارای شش عنصر اصلی است که عبارت از طول های سه ضلع و اندازه های سه زاویهٔ مثلث میباشد. سایر اجزای مثلث اجزای فرعی نامیده میشوند.

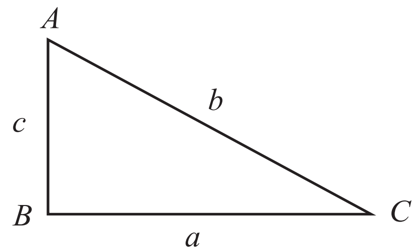


اضلاع مثلث AB, AC, BC یا a, b, c میباشند.

زوایای مثلث $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ یا A, B, C میباشند.

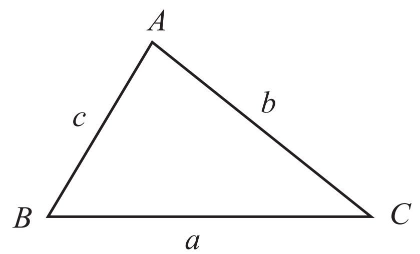
انواع مثلث نظر به زاویه: مثلث نظر به زاویه به سه نوع میباشد.

الف: مثلث قایم الزاویه: که یک زاویه آن $90°$ و دو زاویه آن کوچکتر از $90°$ باشد.



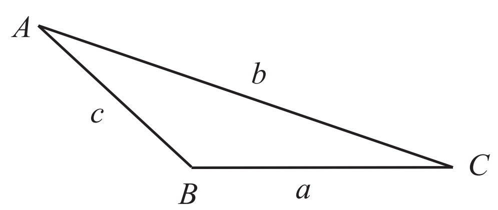
$\hat{B} = 90°$ ، $\hat{A} < 90°$ و $\hat{C} < 90°$

ب: مثلث حاد الزاویه: که هر سه زاویه آن کوچکتر از 90 درجه باشد.



$\hat{B} = 90°$ ، $\hat{A} < 90°$ و $\hat{C} < 90°$

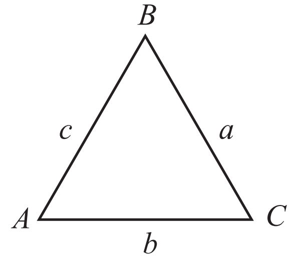
ج: مثلث منفرج الزاویه: که یک زاویه آن بزرگتر از $90°$ و دو زاویه آن کوچکتر از $90°$ باشد.



$\hat{B} > 90°$ ، $\hat{A} < 90°$ و $\hat{C} < 90°$

انواع مثلث نظر به اضلاع: مثلث نظر به اضلاع سه نوع میباشد.

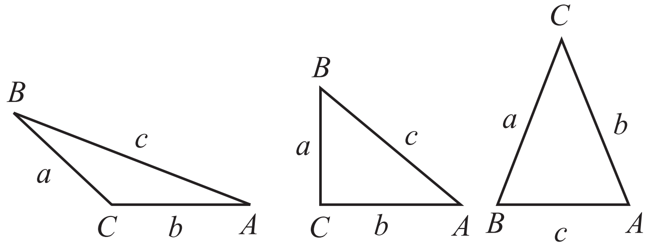
الف: مثلث متساوی الاضلاع: مثلثی است که طول هرسه ضلع و هر سه زاویه آن باهم مساوی باشد.



$\hat{C} < 90°$ و $\hat{B} < 90°$ ، $\hat{A} < 90°$

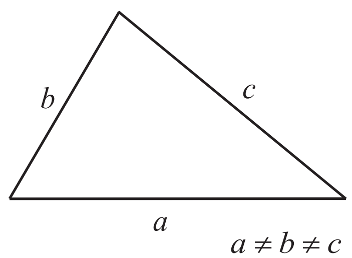
$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

ب: مثلث متساوی الساقین: مثلثی است که طول دو ضلع و زاویه های مقابل آنها باهم مساوی باشد.



$A = B \neq C$ و $a = b \neq c$

ج: مثلث مختلف الاضلاع: مثلثی است که طول هرسه ضلع آن باهم مختلف باشد.



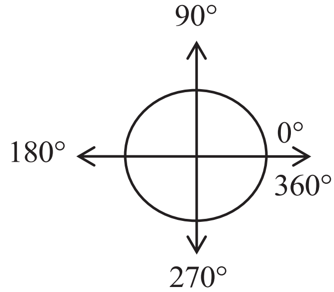
$a \neq b \neq c$

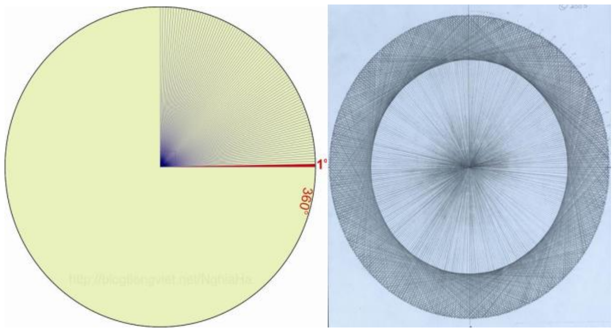
واحد های اندازه گیری زاویه:

درجه (Degree): اگر یک دایره یا یک دور مکمل را به 360 حصه مساوی تقسیم کنیم هر حصه آن یک درجه میباشد.

ویا یک درجه $\frac{1}{360}$ حصه یک دور مکمل میباشد.

قرار شکل:





اجزای درجه عبارت از دقیقه و ثانیه هستند.

درجه به سمبول $(\circ)$، دقیقه به سمبول $(')$ و ثانیه به سمبول $('')$ نشان داده میشود.

روابط بین درجه، دقیقه و ثانیه:

$$1° = 60' \longrightarrow 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^0$$

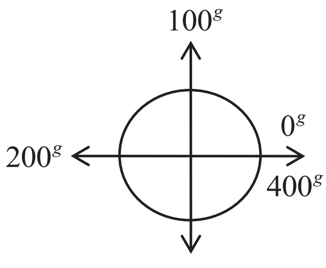
$$1' = 60'' \longrightarrow 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)'$$

$$1° = 3600'' \longrightarrow 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^0$$

گراد (Grad): اگر یک دایره یا یک دور مکمل را به 400 حصه مساوی تقسیم کنیم هر حصه آن یک گراد میباشد.

ویا یک گراد $\frac{1}{400}$ حصه یک دور مکمل میباشد.

قرار شکل:



اجزای گراد عبارت از دقیقه گراد و ثانیه گراد هستند.

سمبول گراد (g)، سمبول دقیقه گراد (\ ) و سمبول ثانیه گراد (\\ ) می باشد.

روابط بین گراد، دقیقه گراد و ثانیه گراد:

$$1^g = 100^{`} \longrightarrow 1^{`} = \left(\frac{1}{100}\right)^g$$

$$1^{`} = 100^{``} \longrightarrow 1^{``} = \left(\frac{1}{100}\right)^{`}$$

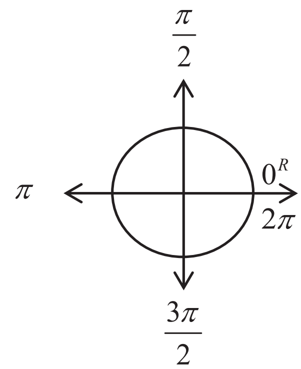
$$1^g = 10000^{``} \longrightarrow 1^{``} = \left(\frac{1}{10000}\right)^g$$

رادیان (Radian): اگر یک دایره یا یک دور مکمل را به 2π حصه مساوی تقسیم نماییم هر حصه آن یک رادیان میباشد.

ویا یک رادیان $\frac{1}{2\pi}$ حصه یک دور مکمل میباشد.

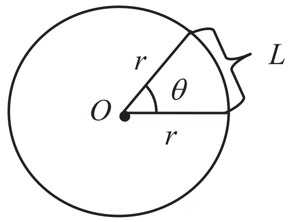
رادیان به سمبول R یا C ویا Rad نشان داده میشود.

قرار شکل:



یادداشت: یک رادیان اندازۀ زاویه مرکزی است که طول قوس مقابل آن با طول شعاع دایره مساوی باشد.

قرار شکل:



$L = r$

$\Rightarrow \theta = 1Rad$

π (pi): عبارت از نسبت محیط دایره بر قطر دایره است که این نسبت تقریباً 3.14 میشود و قیمت نسبتاً دقیقتر آن 3.14159 میباشد.

$$\pi = \frac{22}{7} = 3.142857142857142857142857$$

$$\pi = \frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$$

$$\pi = 3.14$$

π یک حرف لاتین میباشد و بنام عدد ارشمیدس نیز یاد میشود و یکعدد غیر ناطق قبول شده است.

اندازۀ یک دور مکمل 2π رادیان یا 6.28 رادیان میباشد.

اندازۀ یک دور مکمل به سمبول $1rot$ ویا $1rev$ نیز نشان داده میشود وبه هر سه واحد فوق الذکر اندازۀ آن قرار ذیل است.

$1rot = 360° \longrightarrow 1rev = 360°$

$1rot = 400^g \longrightarrow 1rev = 400$

$1rot = 2\pi^R \longrightarrow 1rev = 2\pi^R$

سوال: زاویۀ $2.5°$ را به دقیقه تبدیل کنید؟

حل سوال:

$2.5° = 2.5 \cdot 60'$

$2.5° = 150'$

سوال: زاویۀ $2.5°$ را به درجه و دقیقه تبدیل کنید؟

حل سوال:

$2.5° = 2° + 0.5°$

$2.5° = 2° + 0.5 \cdot 60'$

$2.5° = 2° + 30.0'$

$2.5° = 2° + 30'$

سوال: زاویۀ $-45.3°$ را به دقیقه دریابید؟

حل سوال:

$-45.3° = -45.3 \cdot 60'$

$-45.3° = -2718.0'$

$-45.3° = -2718'$

سوال: زاویۀ $-45.3°$ را به درجه و دقیقه دریابید؟

حل سوال:

$-45.3° = -45° - 0.3°$

$-45.3° = -45° - 0.3 \cdot 60'$

$-45.3° = -45° - 18.0'$

$-45.3° = -45° - 18'$

سوال: قیمت زاویه $120.76°$ را به درجه، دقیقه و ثانیه دریابید؟

حل سوال:

$120.76° = 120° + 0.76°$

$120.76° = 120° + 0.76 \cdot 60'$

$120.76° = 120° + 45.6'$

$120.76° = 120° + 45' + 0.6'$

$120.76° = 120° + 45' + 0.6 \cdot 60''$

$120.76° = 120° + 45' + 36.0''$

$120.76° = 120° + 45' + 36''$

$120.76° = 120°, 45', 36''$

سوال: زاویهٔ $30°$ را به درجه، دقیقه و ثانیه تبدیل کنید؟

حل سوال:

$$30° = 29°, 59', 60''$$

سوال: اگر $x = 10°, 50', 70''$ و $y = 2°, 15', 20''$ باشد $x + y$ را دریابید؟

حل سوال:

$$\begin{array}{l} x = 10°, 50', 70'' \\ \underline{y = 2°, 15', 20''} \\ x + y = 12°, 65', 90'' \to 60'' = 1' \\ x + y = 12°, 66', 30'' \\ x + y = 13°, 6', 30'' \to 60' = 1° \end{array}$$

سوال: اگر $x = 10°, 50', 70''$ و $y = 2°, 15', 20''$ باشد $x - y$ را دریابید؟

حل سوال:

$$\begin{array}{l} x = 10°, 50', 70'' \\ \underline{y = 2°, 15', 20''} \\ x - y = 8°, 35', 50'' \end{array}$$

سوال: اگر $x = 10°, 50', 10''$ و $y = 2°, 15', 20''$ باشد $x - y$ را دریابید؟

حل سوال:

$$\begin{array}{l} x = 10°, 50', 10'' \\ \underline{y = 2°, 15', 20''} \\ x = 10°, 49', 70'' \to 1' = 60'' \\ \underline{y = 2°, 15', 20''} \\ x - y = 8°, 34', 50'' \end{array}$$

سوال: اگر $x = 10°, 5', 70''$ و $y = 2°, 15', 20''$ باشد $x - y$ را دریابید؟

حل سوال:

$$\begin{array}{l} x = 10°, 5', 70'' \\ \underline{y = 2°, 15', 20''} \\ x = 9°, 65', 70'' \to 1° = 60' \\ \underline{y = 2°, 15', 20''} \\ x - y = 7°, 50', 50'' \end{array}$$

سوال: اگر $\alpha = 30°$ و $\beta = 22°, 20'$ باشد $\alpha - \beta$ را دریابید؟

حل سوال:

$$\begin{array}{l} \alpha = 30° \\ \underline{\beta = 22°, 20'} \\ \alpha = 29°, 60' \\ \underline{\beta = 22°, 20'} \\ \alpha - \beta = 7°, 40' \end{array}$$

سوال: اگر $\alpha = 10°$ و $\beta = 2°, 15', 20''$ باشد $\alpha - \beta$ را دریابید؟

حل سوال:

$$\begin{array}{l} \alpha = 10° \\ \underline{\beta = 2°, 15', 20''} \\ \alpha = 9°, 60' \\ \alpha = 9°, 59', 60'' \\ \underline{\beta = 2°, 15', 20''} \\ \alpha - \beta = 7°, 44', 40'' \end{array}$$

سوال: زاویهٔ $45°, 15'$ را به عدد اعشاری دریابید؟

حل سوال:

$$45°, 15' = 45° + \left(\frac{15}{60}\right)^0$$

$$45°, 15' = 45° + \left(\frac{1}{4}\right)^0$$

$$45°, 15' = 45.00° + 0.25°$$

$$45°, 15' = 45.25°$$

سوال: زاویهٔ $50°, 30', 30''$ را از جنس درجه دریابید؟

حل سوال:

$$50°, 30', 45'' = 50° + \left(\frac{30}{60}\right)^0 + \left(\frac{45}{3600}\right)^0$$

$$50°, 30', 45'' = 50° + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{5}{400}\right)^0$$

$$50°, 30', 45'' = 50° + 0.5° + \left(\frac{1}{80}\right)^0$$

$$50°, 30', 45'' = 50° + 0.5° + 0.0125°$$

$$50°, 30', 45'' = 50.0000° + 0.5000° + 0.0125°$$

$$50°, 30', 45'' = 50.5125°$$

سوال: $2\frac{1}{2}$ دور را به درجه تبدیل کنید؟

حل سوال:

$$2\frac{1}{2}rev = \frac{5}{2}\cdot 360^\circ$$
$$2\frac{1}{2}rev = 5\cdot(180)^\circ$$
$$2\frac{1}{2}rev = 900^\circ$$

سوال: زاویهٔ 756° را به دور تبدیل کنید؟

حل سوال: $\frac{756^\circ}{360^\circ} = 2.1rev$

سوال: زاویهٔ 840^g را به دور تبدیل کنید؟

حل سوال: $\frac{840^g}{400^g} = 2.1rev$

سوال: زاویهٔ 1095° از چند دور مکمل تشکیل شده است؟

حل سوال: $\frac{1095^\circ}{360^\circ} = 3.041\overline{6}$

از 3 دور مکمل تشکیل شده است.

تبدیل واحدهای اندازه گیری زاویه به یگدیگر: برای این منظور از رابطهٔ ذیل استفاده میشود.

$$\frac{d}{360} = \frac{g}{400} = \frac{r}{2\pi} / \cdot 2$$
$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{r}{\pi}$$

سوال: زاویهٔ 30° را به واحد رادیان دریابید؟

حل سوال:

$$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} \to \frac{30}{180} = \frac{r}{\pi} \to r = \frac{\cancel{30}^{1}\cdot\pi}{\cancel{180}^{6}} \to r = \frac{\pi}{6}$$

سوال: زاویهٔ 126° را به واحد گراد دریابید؟

حل سوال:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \to \frac{126}{180} = \frac{g}{200} \to g = \frac{126\cdot 200}{180}$$
$$\to g = \frac{25200}{180} \to g = 140$$

سوال: زاویهٔ 40^g را به واحد درجه دریابید؟

حل سوال:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \to \frac{d}{180} = \frac{40}{200} \to d = \frac{180\cdot 40}{200}$$
$$\to d = \frac{18\cdot 4}{2} \to d = 9\cdot 4$$

سوال: زاویهٔ $\frac{\pi}{6}$ را به واحد درجه دریابید؟

حل سوال:

$$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} \to \frac{d}{180} = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} \to d = \frac{180\cdot\frac{\pi}{6}}{\pi}$$
$$\to d = \frac{30\cdot\pi}{\pi} \to d = 30^\circ$$

سوال: $1Rad$ تقریباً چند درجه میشود؟

حل سوال:

$$\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} \to \frac{d}{180} = \frac{1}{\pi} \to d = \frac{180\cdot 1}{\pi}$$
$$\to d = \frac{180}{3.14} \to d = 57.325^\circ \to d = 57^\circ$$

یادداشت: اگر با زاویه واحد ذکر نشود واحد آن رادیان میباشد. مانند سوال های ذیل:

$$2\pi = 2\pi^R$$
$$\pi = \pi^R$$
$$6.28 = 6.28^R$$
$$3.14 = 3.14^R$$

برای آسانی تبدیل رادیان به درجه و گراد میتوانیم از رابطهٔ $\pi = 180^0 = 200^g$ استفاده کنیم.

سوال: $3\pi rad$ را به واحد درجه دریابید؟

حل سوال:

$$3\pi rad = 3\cdot 180^\circ$$
$$3\pi rad = 540^\circ$$

سوال: $\frac{3\pi}{2}rad$ را به واحد گراد دریابید؟

حل سوال:

$$\frac{3\pi}{2}rad = \frac{3\cdot 180^\circ}{2} \to \frac{3\pi}{2}rad = 3\cdot 90^\circ$$
$$\to \frac{3\pi}{2}rad = 270^\circ$$

سوال: کدام زاویه به واحد گراد است که اگر عدد 10 از آن کم شود، اندازهٔ آن به واحد درجه حاصل شود؟

حل سوال:

$$g-10=d$$
$$\frac{d}{180}=\frac{g}{200}\rightarrow\frac{g-10}{180}=\frac{g}{200}$$
$$200\cdot(g-10)=180\cdot g\rightarrow 200g-2000=180g$$
$$200g-180g=2000\rightarrow 20g=2000\ /\div 20$$
$$g=100\rightarrow g=100^{g}$$
$$d=100-10\rightarrow d=90^{\circ}$$

سوال: کدام زاویه به واحد درجه است که اگر عدد 12 بر آن افزوده شود اندازهٔ آن به واحد گراد حاصل شود؟

حل سوال:

$$d+12=g$$
$$\frac{d}{180}=\frac{g}{200}\rightarrow\frac{d}{180}=\frac{d+12}{200}$$
$$200\cdot d=180\cdot(d+12)\rightarrow 200d=180d+2160$$
$$200d-180d=2160\rightarrow 20d=2160\ /\div 20$$
$$\frac{20d}{20}=\frac{2160}{20}\rightarrow d=\frac{216}{2}\rightarrow d=108$$
$$d=108^{\circ}$$
$$g=108+12\rightarrow g=120^{g}$$

سوال: از جنس گراد کدام زاویه است که اگر عدد 15 از آن کم شود، اندازهٔ آن به واحد درجه حاصل شود؟

حل سوال:

$$g-15=d$$
$$\frac{d}{180}=\frac{g}{200}\rightarrow\frac{g-15}{180}=\frac{g}{200}$$
$$200\cdot(g-15)=180\cdot g\rightarrow 200g-3000=180g$$
$$200g-180g=3000\rightarrow 20g=3000\ /\div 20$$
$$g=150\rightarrow g=150^{g}$$
$$d=150-15\rightarrow d=135^{\circ}$$

یکتعداد زاویه های مهم به واحدات درجه و رادیان:

$$0^{\circ}=0,30^{\circ}=\frac{\pi}{6},45^{\circ}=\frac{\pi}{4},60^{\circ}=\frac{\pi}{3},90^{\circ}=\frac{\pi}{2}$$

$$120^{\circ}=\frac{2\pi}{3},135^{\circ}=\frac{3\pi}{4},150^{\circ}=\frac{5\pi}{6},180^{\circ}=\pi$$

$$210^{\circ}=\frac{7\pi}{6},225^{\circ}=\frac{5\pi}{4},240^{\circ}=\frac{4\pi}{3},270^{\circ}=\frac{3\pi}{2}$$

$$300^{\circ}=\frac{5\pi}{2},315^{\circ}=\frac{7\pi}{4},330^{\circ}=\frac{11\pi}{6},360^{\circ}=2\pi$$

حل سوالات مربوط به عقربه های ساعت:

ساعت شمار ساعت در 12 ساعت، دقیقه شمار ساعت در یک ساعت ویا 60 دقیقه و ثانیه شمار ساعت در یک دقیقه ویا 60 ثانیه یک دور مکمل ویا 360 درجه را طی میکنند.

برای حل سوالات عقربه های ساعت ازتناسب ذیل استفاده میکنیم.

$$\frac{\theta}{360}=\frac{h}{12}=\frac{\min}{60}=\frac{\sec}{60}$$

$h=$ ساعت

$min=$ دقیقه

$sec=$ ثانیه

سوال: مقدار زاویهٔ مثبت را به واحد درجه دریابید اگر ثانیه شمار ساعت 40 ثانیه دوران کرده باشد؟

$$\frac{\theta}{360}=\frac{\sec}{60}\rightarrow\frac{\theta}{360}=\frac{40}{60}$$
$$\theta=\frac{360\cdot 40}{60}\rightarrow\theta=240^{\circ}$$

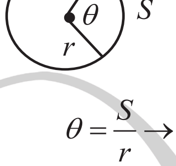
سوال: مقدار زاویهٔ مثبت را به واحد درجه دریابید اگر دقیقه شمار ساعت 15 دقیقه دوران کرده باشد؟

$$\frac{\theta}{360}=\frac{\min}{60}\rightarrow\frac{\theta}{360}=\frac{15}{60}$$
$$\theta=\frac{360\cdot 15}{60}\rightarrow\theta=90^{\circ}$$

سوال:مقدار زاویهٔ مثبت را به واحد درجه دریابید اگر ساعت شمار ساعت 1 ساعت دوران کرده باشد؟

$$\frac{\theta}{360}=\frac{h}{12}\rightarrow\frac{\theta}{360}=\frac{1}{12}$$
$$\theta=\frac{360\cdot 1}{12}\rightarrow\theta=30^{\circ}$$

رابطه بین شعاع دایره، قوس مقابل و زاویهٔ مرکزی: قرار شکل رابطهٔ ذیل وجود دارد.



$$\theta=\frac{S}{r}\rightarrow S=r\cdot\theta$$

اگر زاویه به واحد رادیان داده شده باشد طول قوس مقابل از رابطه ذیل دریافت میشود.

$$S = \theta \cdot r$$

اگر زاویه به واحد درجه داده شده باشد طول قوس مقابل از رابطه ذیل دریافت میشود.

$$S = \frac{\theta}{180} \cdot \pi r$$

اگر زاویه به واحد گراد داده شده باشد طول قوس مقابل از رابطه ذیل دریافت میشود.

$$S = \frac{\theta}{200} \cdot \pi r$$

سوال: طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی $1rad$ را دریابید اگر شعاع دایره $10cm$ باشد؟

حل سوال:

$$S = \theta \cdot r$$
$$S = 1rad \cdot 10cm \to S = 1 \cdot 1 \cdot 10cm \to S = 10cm$$

سوال: طول قوس مقابل زاویهٔ مرکزی $\frac{\pi}{3}$ را دریابید اگر قطر دایره $30cm$ باشد؟

حل سوال:

$$S = \theta \cdot r$$
$$S = \frac{\pi}{3} \cdot 30cm \to S = 10\pi cm$$

سوال: اگر شعاع یک دایره 15 سانتی متر باشد، طول قوس مقابل زاویهٔ 60 درجه را دریابید؟

حل سوال:

$$S = \frac{\theta}{180} \cdot \pi r$$
$$S = \frac{60}{180} \cdot \pi \cdot 15cm \to S = 5\pi cm$$

سوال: اگر طول ثانیه شمار $6cm$ باشد، در 40 ثانیه چند سانتی متر فاصله را طی میکند؟

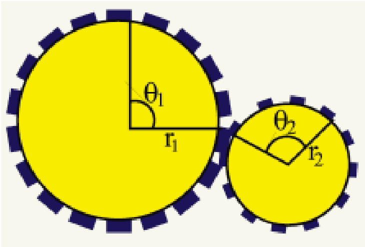
حل سوال:

$$\frac{\theta}{360} = \frac{\sec}{60}$$
$$\frac{\theta}{360} = \frac{40}{60} \to \theta = \frac{360 \cdot 40}{60} \to \theta = 240^\circ$$

$$S = \frac{\theta}{180} \cdot \pi r \to S = \frac{240}{180} \cdot \pi \cdot 6cm$$
$$S = 8\pi cm$$

رابطه بین زاویه طی شده و شعاع دایره چرخ کوچک و بزرگ:

قرار شکل ذیل بین چرخ کوچک و بزرگ رابطه ذیل وجود دارد.



$$S_1 = \theta_1 \cdot r_1 \quad , \quad S_2 = \theta_2 \cdot r_2$$
$$S_1 = S_2$$
$$\theta_1 \cdot r_1 = \theta_2 \cdot r_2$$

سوال: شعاع تایر بزرگ یک تراکتور یک متر و شعاع تایر کوچک آن $60cm$ است، اگر تایر کوچک تراکتور زاویه 30° را طی کرده باشد، زاویه طی شده توسط تایر بزرگ تراکتور را دریابید؟

حل سوال:

$$r_1 = 1m \to r_1 = 100cm$$
$$r_2 = 60cm$$
$$\theta_2 = 30^\circ \to \theta_2 = \frac{\pi}{6} rad$$
$$\theta_1 = ?$$
$$\theta_1 \cdot r_1 = \theta_2 \cdot r_2 \to \theta_1 = \frac{\theta_2 \cdot r_2}{r_1}$$
$$\theta_1 = \frac{\frac{\pi}{6} rad \cdot 60cm}{100cm} \to \theta_1 = \frac{\pi}{10} rad \to \theta_1 = 18^\circ$$

دریافت زاویه بین دو عقربه های ساعت: برای این منظور از رابط ذیل استفاده میکنیم.

$$\theta = |5.5\min - 30hr|$$

مثال: در ساعت 3 و 40 دقیقه، زاویه بین عقربه ساعت گرد و دقیقه گرد چند درجه است؟

حل سوال:

$$\theta = |5.5\min - 30hr|$$
$$\theta = |5.5 \cdot 40 - 30 \cdot 3|$$

$\theta = |220 - 90|$

$\theta = |130|$

$\theta = 130°$

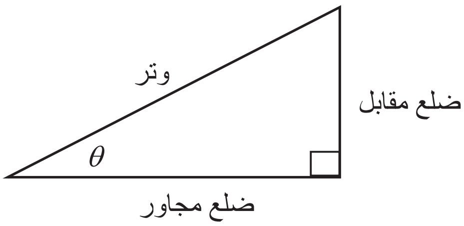
تعریف نسبت های مثلثاتی

نسبت های مثلثاتی همیشه در یک مثلث قایم الزاویه برای زاویه حاده تعریف میشوند.

برای نسبت های مثلثاتی اختصارات ذیل وجود دارند.

اختصارات	نسبت های مثلثاتی
sin	ساین Sine
cos	کوساین Cosine
tan یا tg	تانجانت Tangent
cot یا $\cot g$	کوتانجانت Cotangent
sec	سکنت Secant
csc یا $\cos ec$	کوسکنت Cosecant

در یک مثلث قایم الزاویه برای یک زاویهٔ حاده مانند θ نسبت های مثلثاتی طور ذیل تعریف میشوند.

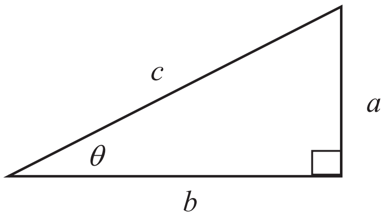


$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$　　$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$

$\cot\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$　　$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$

$\csc\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$　　$\sec\theta = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$

اگر اضلاع مثلث را به a، b و c نشان دهیم نسبت های مثلثاتی طور ذیل نیز تعریف میشوند.



1) $\sin\theta = \frac{a}{c}$

2) $\cos\theta = \frac{b}{c}$

3) $\tan\theta = \frac{a}{b}$

4) $\cot\theta = \frac{b}{a}$

5) $\sec\theta = \frac{c}{b}$

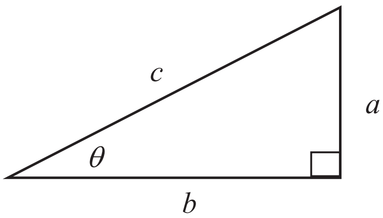
6) $\csc\theta = \frac{c}{a}$

ساین با کوسکنت معکوس میباشد. $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$

کوساین با سکنت معکوس میباشد. $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$

تانجانت با کوتانجانت معکوس میباشد. $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$

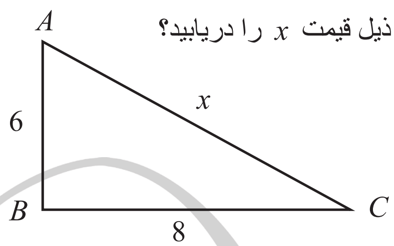
قضیهٔ فیثاغورث: در هر مثلث قایم الزاویه مربع وتر مساوی به مجموع مربعات اضلاع قایم میباشد.



$c^2 = a^2 + b^2$

یا $a^2 + b^2 = c^2$

سوال: در شکل ذیل قیمت x را دریابید؟

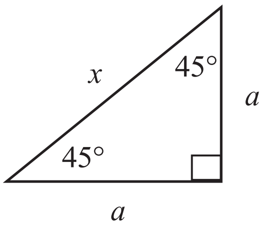


حل سوال:

$$(AC)^2=(AB)^2+(BC)^2$$
$$x^2=6^2+8^2$$
$$x^2=36+64$$
$$x^2=100\,/\sqrt{\ }$$
$$x=10$$

دریافت نسبت های مثلثاتی بعضی زاویه ها:

نسبت های مثلثاتی زاویه 45°: نسبت های مثلثاتی زاویه 45° در مثلث قایم الزاویهٔ متساوی الساقین دریافت میشوند.



$$x^2=a^2+a^2$$
$$x^2=2a^2\,/\sqrt{\ }\rightarrow x=a\sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ=\frac{a}{x}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ=\frac{a}{x}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

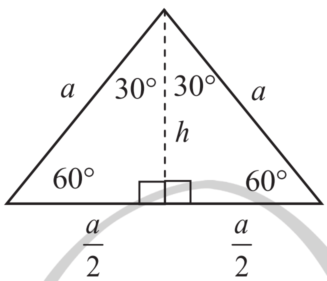
$$\tan 45^\circ=\frac{a}{a}=1$$

$$\cot 45^\circ=\frac{a}{a}=1$$

$$\sec 45^\circ=\frac{x}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ=\frac{x}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 30°: نسبت های مثلثاتی زاویه 30° در مثلث متساوی الاضلاع دریافت میشوند.



$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2\rightarrow h^2=a^2-\frac{a^2}{4}$$
$$h^2=\frac{3a^2}{4}\,/\sqrt{\ }\rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}}=\frac{\cancel{a}\cdot 1}{2\cdot\cancel{a}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ=\frac{h}{a}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{1}}=\frac{\cancel{a}\sqrt{3}\cdot 1}{2\cdot\cancel{a}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

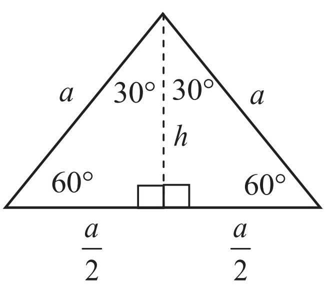
$$\tan 30^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{h}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{a}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ=\frac{h}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\frac{\cancel{a}\sqrt{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{a}}=\sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ=\frac{a}{h}=\frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{a}{1}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\cancel{a}\cdot 2}{1\cdot\cancel{a}\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{\ }}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ=\frac{a}{\frac{a}{2}}=\frac{\frac{a}{1}}{\frac{a}{2}}=\frac{\cancel{a}\cdot 2}{1\cdot\cancel{a}}=\frac{2}{1}=2$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 60°: نسبت های مثلثاتی زاویه 60° در مثلث متساوی الاضلاع دریافت میشوند.



$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2\rightarrow h^2=a^2-\frac{a^2}{4}$$
$$h^2=\frac{3a^2}{4}\,/\sqrt{\ }\rightarrow h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{\cancel{a}\sqrt{3}\cdot 1}{2\cdot \cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{\cancel{a}\cdot 1}{2\cdot \cancel{a}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\cancel{a}\sqrt{3}\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot \cancel{a}} = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{a}\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot \cancel{a}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{a}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{a}{2}} = \frac{\cancel{a}\cdot 2}{1\cdot \cancel{a}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\csc 60^\circ = \frac{a}{h} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{a}\cdot 2}{1\cdot \cancel{a}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

زاویهٔ مکمله: دو زاویهٔ که مجموع آنها 90 درجه باشد، زاویه های مکمله نامیده میشوند.

$$\alpha + \theta = 90^\circ$$

مکمله زاویه	زاویه
$\theta = 90^\circ - \alpha$ $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	α
60°	30°
70°	20°
88°	2°
0°	90°
$70 + x$	$20 - x$
$+120^\circ$	-30°
-60°	150°
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{10} - x$	$\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$

روابط بین نسبت های مثلثاتی دو زاویهٔ مکمله: بین دو زاویه مکمله مانند x و y روابط ذیل وجود دارد.

$$x + y = 90^\circ$$

1) $\sin x = \cos y$

2) $\cos x = \sin y$

3) $\tan x = \cot y$

4) $\cot x = \tan y$

5) $\sec x = \csc y$

6) $\csc x = \sec y$

سوال: روابط بین نسبت های مثلثاتی زاویه 30° و 60° را بنویسید؟

حل سوال:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

سوال: روابط بین نسبت های مثلثاتی زاویه 20° و 70° را بنویسید؟

حل سوال:

$$\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$$

$$\cos 20^\circ = \sin 70^\circ$$

$$\tan 20^\circ = \cot 70^\circ$$

$$\cot 20^\circ = \tan 70^\circ$$

$$\sec 20^\circ = \csc 70^\circ$$

$$\csc 20° = \sec 70°$$

سوال: روابط بین نسبت های مثلثاتی زاویه $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{6}$ را بنویسید؟

حل سوال:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

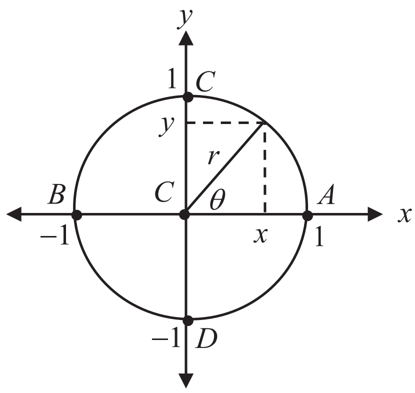
$$\tan\frac{\pi}{3} = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\cot\frac{\pi}{3} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\frac{\pi}{3} = \csc\frac{\pi}{6} = 2$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

دایره مثلثاتی یا دایره واحد: عبارت از دایره است که شعاع آن یک واحد باشد.



$$A(1,0),\ B(-1,0),\ C(0,1),\ D(0,-1),\ r=1$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1^2$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

رابطه $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ بنام رابطه اساسی مثلثاتی یاد میشود.

روابط بین نسبت های مثلثاتی یک زاویه: بادرنظرداشت تعریف نسبت های مثلثاتی، بین نسبت های مثلثاتی یک زاویهٔ مانند θ روابط ذیل وجود دارند.

1) $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \rightarrow \sin\theta\cdot\cos\theta = 1$

2) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \rightarrow \cos\theta\cdot\sec\theta = 1$

3) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \rightarrow \tan\theta\cdot\cot\theta = 1$

4) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \rightarrow \cot\theta\cdot\tan\theta = 1$

5) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \rightarrow \sec\theta\cdot\cos\theta = 1$

6) $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \rightarrow \csc\theta\cdot\sin\theta = 1$

7) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

8) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

9) $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

10) $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

11) $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

12) $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$

13) $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

14) $\csc^2\theta - 1 = \cot^2\theta$

15) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

16) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

افاده های مثلثاتی: برای ساده ساختن افاده های مثلثاتی از روابط مثلثاتی استفاده میشود.

سوال: افاده های ذیل را ساده سازید؟

1) $\sin\alpha\cdot\cot\alpha = ?$

$$= \cancel{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}} = \cos\alpha$$

2) $\cos x \cdot \tan x = ?$

$= \cancel{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} = \sin x$

3) $\sin^2\theta + \cos^2\theta + \tan^2\theta = ?$

$\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1} + \tan^2\theta = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

4) $\cot\alpha + \tan\alpha = ?$

$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

$= \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \csc\alpha \cdot \sec\alpha$

5) $\frac{\sin x \cdot \cos x \cdot tgx \cdot \cot x}{1-\sin^2 x} = ?$

$= \frac{\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}}}{1-\sin^2 x} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}$

$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

6) $\frac{\sec A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\cos A} = ?$

$= \frac{\cos A \cdot \sec A - \sin^2 A}{\sin A \cdot \cos A} = \frac{\cos A \cdot \sec A - \sin^2 A}{\sin A \cdot \cos A}$

$= \frac{1-\sin^2 A}{\sin A \cdot \cos A} = \frac{\cos^2 A}{\sin A \cdot \cos A} = \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$

7) $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = ?$

$= \frac{1+\cos x + 1 - \cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{2}{1-\cos^2 x}$

$= \frac{2}{\sin^2 x} = 2\csc^2 x$

8) $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = ?$

$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$

9) $\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos^2 x}{2} = ?$

$\frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\cos^2 x}{2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2} = \frac{1}{2}$

10) $\frac{1-\sin^4 x}{1+\sin^2 x} = ?$

$\frac{1-\sin^4 x}{1+\sin^2 x} = \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cancel{\left(1+\sin^2 x\right)}}{\cancel{1+\sin^2 x}}$

$= 1-\sin^2 x = \cos^2 x$

11) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = ?$

$= \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} = \frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{1-\cos x}}$

$= 1+\cos x$

12) $\sec^2 x - tg^2 x = ?$

$\sec^2 x - tg^2 x = 1 + \cancel{tg^2 x} - \cancel{tg^2 x} = 1$

13) $\left(1-\sin^2 x\right)\left(1+\sec^2 x\right) = ?$

$= \left(\cos^2 x\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \cos\ \ x + 1$

14) $2\sin 42° - 3\cos 48° + \frac{1}{\csc 42°} + 15 = ?$

$= 2\sin 42° - 3\cos 48° + \sin 42° + 15$

$= \cancel{3\sin 42°} - \cancel{3\sin 42°} + 15$

$= 15$

15) $\frac{1+\sin^2 x - \cos^2 x}{2\sin^2 x} = ?$

$= \frac{1-\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 x} = 1$

مطابقت های مثلثاتی: مساواتی که به تمام قیمت های زاویه x هردو طرف باهم مساوی باشند بنام مطابقت مثلثاتی یاد میشوند.

بادرنظرداشت روابط مثلثاتی مطابقت های مثلثاتی ساده میشوند.

سوال: مطابقت $\frac{\sin x + \cos x \cdot tgx}{\cos x} = 2tgx$ را ثبوت کنید؟

حل سوال:

$\frac{\sin x + \cos x \cdot tgx}{\cos x} = \frac{\sin x + \cancel{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}}{\cos x}$

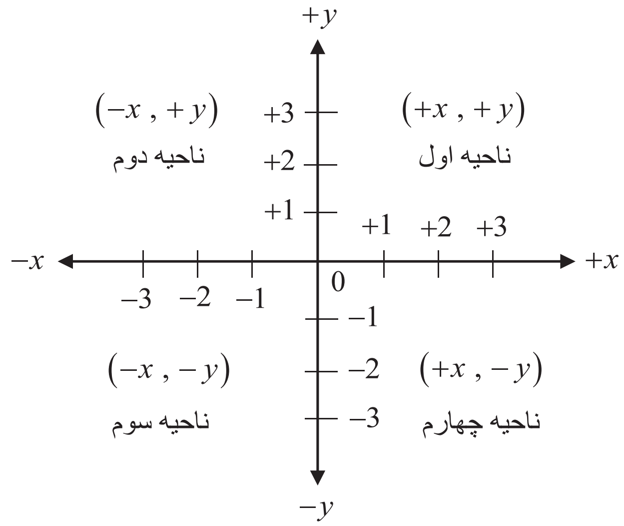
$= \frac{\sin x + \sin x}{\cos x} = \frac{2\sin x}{\cos x} = 2tgx$

سوال: مطابقت $\frac{1+tg^2 x}{1+\cot^2 x} = tg^2 x$ را ثبوت کنید؟

حل سوال: $\frac{1+tg^2 x}{1+\cot^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\csc^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = tg^2 x$

سیستم کمیات وضعیه قایم: در سیستم کمیات وضعیه هر نقطه به شکل جوره مرتب (x, y) ارایه میشود.

نامگذاری ناحیه های چهارگانه در سیستم کمیات وضعیه قرار ذیل اند.



اشاره نقاط در سیستم کمیات وضعیه: اشاره نقاط در چهار ناحیه سیستم کمیات وضعیه قرار ذیل میباشد.

در ناحیه اول قیمت های x و y هردو مثبت اند.

$$I \Rightarrow (x, y) = (+,+)$$

در ناحیه دوم قیمت های x منفی و قیمت های y مثبت اند.

$$II \Rightarrow (x, y) = (-,+)$$

در ناحیه سوم قیمت های x و y هردو منفی اند.

$$III \Rightarrow (x, y) = (-,-)$$

در ناحیه چهارم قیمت های x مثبت و قیمت های y منفی اند.

$$IV \Rightarrow (x, y) = (+,-)$$

سوال: نقطه $(2,7)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

حل سوال: در ناحیه اول قرار دارد.

سوال: نقطه $(-2,4)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

حل سوال: در ناحیه دوم قرار دارد.

سوال: نقطه $(-3,-7)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

حل سوال: در ناحیه سوم قرار دارد.

سوال: نقطه $\left(\frac{2}{3}, -\sqrt{5}\right)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

حل سوال: در ناحیه چهارم قرار دارد.

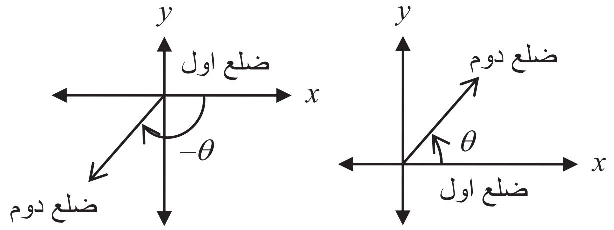
سوال: نقطه $(5,0)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

حل سوال: بالای محور x قرار دارد.

سوال: نقطه $(0,8)$ در کدام ناحیه قرار دارد؟

حل سوال: بالای محور y قرار دارد.

حالت معیاری یا ستندرد یک زاویه: اگر ضلع اول یک زاویه در جهت مثبت محور x، ضلع دوم آن در یک نقطه اختیاری و رأس آن در مبدأ کمیات وضعیه قرار داشته باشد، زاویه در حالت ستندرد گفته میشود.



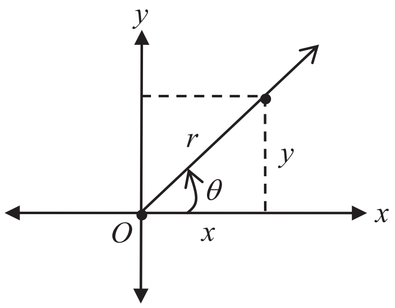
نسبت های مثلثاتی یک زاویهٔ اختیاری و مختصات نقطه: یک زاویهٔ اختیاری را در نظر میگیریم و یک نقطه را بالای ضلع دوم آن انتخاب میکنیم.

x و y نقطه را تعیین میکنیم.

x نقطه بنام فاصلهٔ نقطه و y نقطه بنام ترتیب نقطه یاد میشود.

از مبدأ O الی نقطهٔ P بنام وکتور شعاع یاد میشود وبه حرف r نشان داده میشود.

در ابتدا وکتورشعاع را از رابطهٔ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ محاسبه کرده و بعداً نسبت های مثلثاتی را از روابط ذیل دریافت میکنیم.



ضلع مقابل همیشه مساوی به y میباشد.

ضلع مجاور همیشه مساوی به x میباشد.

وتر همیشه مساوی به r بوده و همیشه مثبت میباشد.

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}$$

سوال: در حالت ستندرد ضلع دوم یک زاویه مانند θ از نقطهٔ $(-4,3)$ عبور میکند، تمام نسبت های مثلثاتی آنرا دریابید؟

حل سوال: زاویه در ناحیه دوم قرار دارد.

$$x=-4,\ y=3$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow r=\sqrt{(-4)^2+(3)^2}$$

$$r=\sqrt{+16+9} \rightarrow r=\sqrt{25} \rightarrow r=5$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \rightarrow \sin\theta=\frac{3}{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r} \rightarrow \cos\theta=\frac{-4}{5} \rightarrow \cos\theta=-\frac{\ }{5}$$

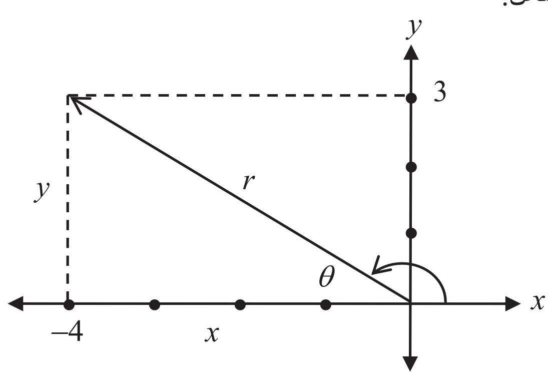
$$\tan\theta=\frac{y}{x} \rightarrow \tan\theta=\frac{3}{-4} \rightarrow \tan\theta=-\frac{\ }{4}$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y} \rightarrow \cot\theta=\frac{-4}{3} \rightarrow \cot\theta=-\frac{\ }{3}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x} \rightarrow \sec\theta=\frac{5}{-4} \rightarrow \sec\theta=-\frac{5}{4}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y} \rightarrow \csc\theta=\frac{5}{3}$$

قرار شکل:



سوال: در حالت ستندرد ضلع دوم زاویهٔ تیتا θ از نقطهٔ $(1,-3)$ عبور میکند. نسبت های مثلثاتی آنرا محاسبه کنید؟

حل سوال: زاویه در ناحیه چهارم قرار دارد.

$$x=1,\ y=-3$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow r=\sqrt{(1)^2+(-3)^2}$$

$$r=\sqrt{+1+9} \rightarrow r=\sqrt{10}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \rightarrow \sin\theta=\frac{-3}{\sqrt{10}} \rightarrow \sin\theta=-\frac{\ }{\sqrt{10}}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r} \rightarrow \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

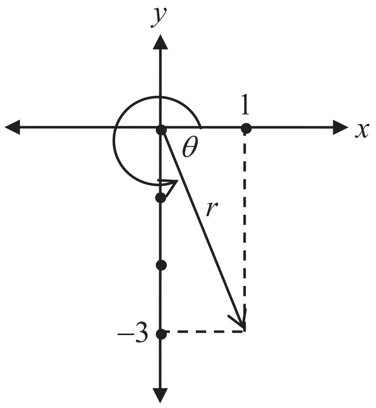
$$\tan\theta=\frac{y}{x} \rightarrow \tan\theta=\frac{-3}{1} \rightarrow \tan\theta=-3$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y} \rightarrow \cot\theta=\frac{1}{-3} \rightarrow \cot\theta=-\frac{1}{3}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x} \rightarrow \sec\theta=\frac{\sqrt{10}}{1} \rightarrow \sec\theta=\sqrt{10}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y} \rightarrow \csc\theta=\frac{\sqrt{10}}{-3} \rightarrow \csc\theta=-\frac{\sqrt{10}}{3}$$

قرار شکل:



سوال: در حالت معیاری ضلع دوم زاویهٔ θ از نقطهٔ $(-8,-6)$ عبور میکند. نسبت های مثلثاتی آنرا محاسبه کنید؟

حل سوال: زاویه در ناحیه سوم قرار دارد.

$$x=-8,\ y=-6$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow r=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}$$

$$r=\sqrt{+64+36} \rightarrow r=\sqrt{100} \rightarrow r=10$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \rightarrow \sin\theta=\frac{-6}{10} \rightarrow \sin\theta=-\frac{\ }{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}\rightarrow\cos\theta=\frac{-8}{10}\rightarrow\cos\theta=-\frac{\;}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\rightarrow\tan\theta=\frac{-6}{-8}\rightarrow\tan\theta=+\frac{\;}{4}$$

$$\cot\theta=\frac{x}{y}\rightarrow\cot\theta=\frac{-8}{-6}\rightarrow\cot\theta=+\frac{\;}{3}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x}\rightarrow\sec\theta=\frac{10}{-8}\rightarrow\sec\theta=-\frac{5}{4}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y}\rightarrow\csc\theta=\frac{10}{-6}\rightarrow\csc\theta=-\frac{5}{3}$$

تعیین اشارهٔ نسبت های مثلثاتی: اشارهٔ نسبت های مثلثاتی یک زاویه ارتباط به موقعیت ضلع دوم دارد. با در نظرداشت تعریف نسبت های مثلثاتی یک زاویهٔ اختیاری و اشاره های فاصله و ترتیب نقطه اشارهٔ نسبت های مثلثاتی تعیین میشود.

اشارهٔ نسبت های مثلثاتی در چهار ناحیهٔ سیستم کمیات وضعیه قرار ذیل میباشد.

در ناحیه اول تمام نسبت های مثلثاتی مثبت میباشند.

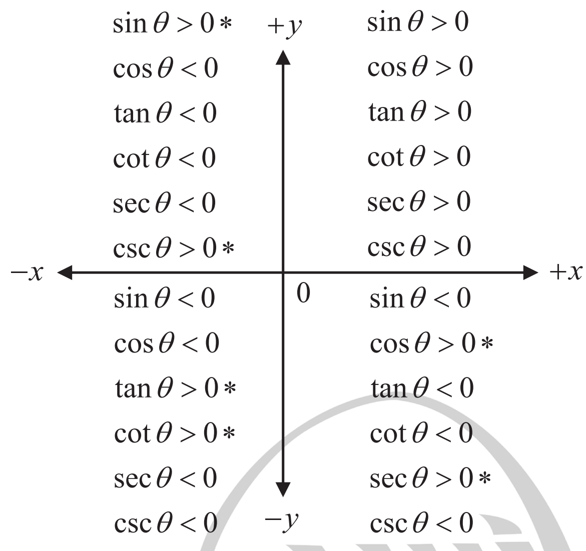
در ناحیه دوم ساین و کوسکنت مثبت میباشند و سایر نسبت ها منفی میباشند.

در ناحیه سوم تانجانت و کوتانجانت مثبت میباشند و سایر نسبت ها منفی میباشند.

در ناحیه چهارم کوساین و سکنت مثبت میباشند و سایر نسبت ها منفی میباشند.

هم چنان میتوانیم با درنظرداشت اشارهٔ نسبت های مثلثاتی نامساوات های ذیل را بنویسیم.

نامگذاری ناحیه های چهارگانه در سیستم کمیات وضعیه قرار ذیل اند.



از تعیین اشارهٔ نسبت های مثلثاتی روابط ذیل حاصل میشوند.

الف: sin و csc همیشه هم اشاره یا هم علامه میباشند.

ب: cos و sec همیشه هم اشاره یا هم علامه میباشند.

ج: tan و cot همیشه هم اشاره یا هم علامه میباشند.

سوال: اگر $\sin x>0$ و $\cos x<0$ باشد زاویهٔ x مربوط کدام ناحیه است:

حل سوال: زاویه x مربوط ناحیه دوم میباشد.

سوال: اگر $\sin x<0$ و $\cos x<0$ باشد زاویهٔ x مربوط کدام ناحیه است:

حل سوال: زاویه x مربوط ناحیه سوم میباشد.

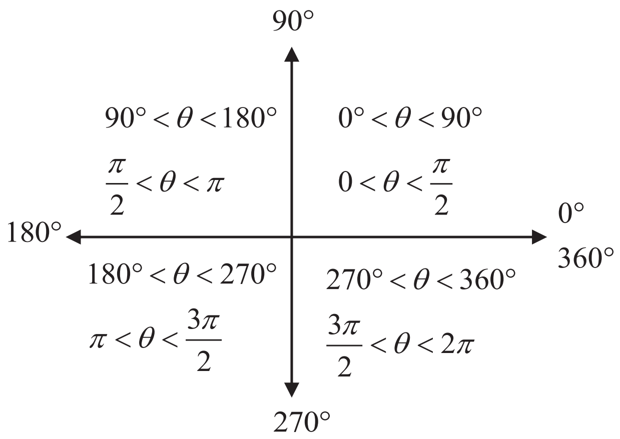
سوال: اگر $\sin x<0$ و $\cos x>0$ باشد زاویهٔ x مربوط کدام ناحیه است:

حل سوال: زاویه x مربوط ناحیه چهارم میباشد.

سوال: اگر $\tan x>0$ و $\cot x<0$ باشد زاویهٔ x مربوط کدام ناحیه است:

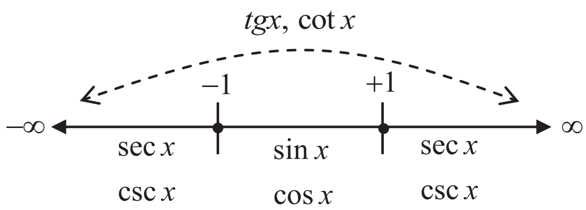
حل سوال: این نوع زاویه امکان ندارد.

تعین موقعیت زاویه در چهار ناحیه: موقعیت زاویه در چهار ناحیه طور ذیل نشان داده میشود.



ساحهٔ تحول نسبت های مثلثاتی: قیمت های که نسبت های مثلثاتی میتوانند اختیار کنند بنام ساحهٔ تحول نسبت های مثلثاتی یاد میشوند.

بالای محور اعداد، ساحهٔ تحول نسبت های مثلثاتی طور ذیل نشان داده میشود.



ساحهٔ تحول نسبت های مثلثاتی توسط نامساوات و انتروال طور ذیل ارایه میشود.

ساحهٔ تحول ساین و کوساین زوایا: ساحهٔ تحول ساین و کوساین زوایا قرار ذیل میباشد.

$$[-1\,,+1] \text{ یا } -1 \le \begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix} \le +1$$

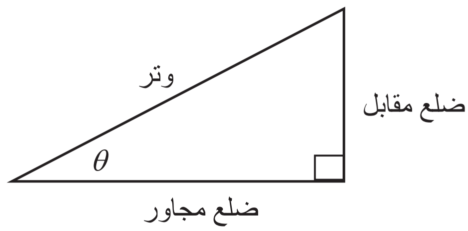
ساحهٔ تحول سکنت و کوسکنت زوایا: ساحهٔ تحول سکنت و کوسکنت زوایا قرار ذیل میباشد.

$$(-\infty\,,-1]\cup[+1\,,\infty) \text{ یا } -1 \ge \begin{pmatrix}\sec x\\ \csc x\end{pmatrix} \ge +1$$

ساحهٔ تحول تانجانت و کوتانجانت زوایا: ساحهٔ تحول تانجانت و کوتانجانت زوایا قرار ذیل میباشد.

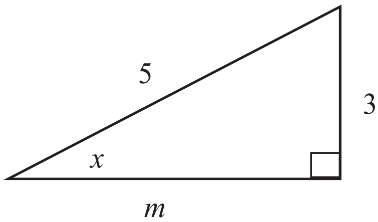
$$(-\infty\,,+\infty) \text{ یا } -\infty < \begin{pmatrix}\tan x\\ \cot x\end{pmatrix} < +\infty$$

دریافت نسبت های مثلثاتی یک زاویه از جنس یک نسبت آن: در ابتدا یک مثلث قایم الزاویه را با زاویهٔ که نسبت آن خواسته شده است، رسم میکنیم. برای آسانی محاسبه همیشه مثلث قایم الزاویه را طور ذیل درنظر میگیریم. بادرنظرداشت تعریف نسبت های مثلثاتی از نسبت داده شده استفاده کرده و دو ضلع مثلث را تعیین میکنیم. ضلع سوم را طبق قضیهٔ فیثاغورث دریافت میکنیم. نسبت مثلثاتی خواسته شده را محاسبه کرده و اشارهٔ آنرا نظر به ناحیه تعیین میکنیم.



سوال: اگر $\sin x = \frac{3}{5}$ و $\pi > x > \frac{\pi}{2}$ باشد. تمام نسبت های مثلثاتی آنرا دریابید؟

حل سوال: زاویه در ناحیه دوم قرار دارد.



$m^2 + 3^2 = 5^2 \to m^2 = 25 - 9$

$m^2 = 16 / \sqrt{\ } \to m = 4$

$$\sin x = +\frac{3}{5}$$

$$\cos x = -\frac{4}{5}$$

$$\tan x = -\frac{3}{4}$$

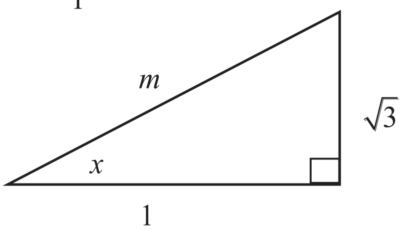
$$\cot x = -\frac{4}{3}$$

$$\sec x = -\frac{5}{4}$$

$$\csc x = +\frac{5}{3}$$

سوال: اگر $\tan x = -\sqrt{3}$ و $2\pi > x > \frac{3\pi}{2}$ باشد. ساین و کوساین آنرا دریابید؟

حل سوال: زاویه در ناحیه چهارم قرار دارد. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{1}$



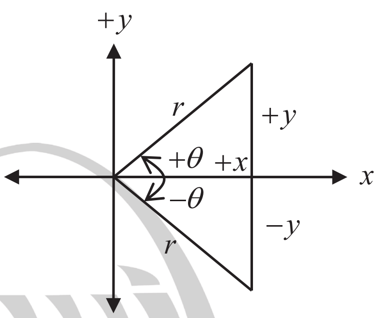
$m^2 = (1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$

$m^2 = 1 + 3 \to m^2 = 4 / \sqrt{\ } \to m = 2$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = +\frac{1}{2}$$

دریافت نسبت های مثلثاتی زاویه های منفی: برای این منظور از نسبت های مثلثاتی زاویه های مثبت و روابط ذیل استفاده میکنیم.



نسبت های مثلثاتی زاویه های مثبت:

$$\sin\theta=\frac{+y}{r}=+\frac{y}{r}$$

$$\cos\theta=\frac{+x}{r}=+\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{+y}{+x}=+\frac{y}{x}$$

$$\cot\theta=\frac{+x}{+y}=+\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{r}{+x}=+\frac{r}{x}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{+y}=+\frac{r}{y}$$

نسبت های مثلثاتی زاویه های منفی:

$$\sin(-\theta)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r}=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\frac{+x}{r}=+\frac{x}{r}=+\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=\frac{-y}{+x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$$

$$\cot(-\theta)=\frac{+x}{-y}=-\frac{x}{y}=-\cot\theta$$

$$\sec(-\theta)=\frac{r}{+x}=+\frac{r}{x}=+\sec\theta$$

$$\csc(-\theta)=\frac{r}{-y}=-\frac{r}{y}=-\csc\theta$$

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه $-30°$ را دریابید:

$$\sin(-30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$$

$$\cos(-30°)=+\cos 30°=+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-30°)=-\tan 30°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(-30°)=-\cot 30°=-\sqrt{3}$$

$$\sec(-30°)=+\sec 30°=+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc(-30°)=-\csc 30°=-2$$

نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه:

قضیهٔ اول: ساین مجموع و تفاضل دو زاویهٔ A و B عبارت است از:

$$\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B$$

قضیهٔ دوم: کوساین مجموع و تفاضل دو زاویهٔ A و B عبارت است از:

$$\cos(A+B)=\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B$$

قضیهٔ سوم: تانجانت مجموع و تفاضل دو زاویهٔ A و B عبارت است از:

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}$$

افاده های مثلثاتی داده شده را ساده سازید؟

1) $\cos x\cos y-\sin x\sin y=?$

$\cos x\cos y-\sin x\sin y=\cos(x+y)$

2) $\cos 2x\cdot\cos 3x-\sin 2x\cdot\sin 3x=?$

$=\cos(2x+3x)=\cos 5x$

3) $\cos 10°\cdot\cos 50°-\sin 10°\cdot\sin 50°=?$

$=\cos(10°+50°)$

$=\cos 60°=\frac{1}{2}$

4) $\cos\alpha\cdot\sin(\gamma-\alpha)-\sin\alpha\cdot\cos(\gamma-\alpha)=?$

$=\sin(\gamma-\alpha)\cdot\cos\alpha-\cos(\gamma-\alpha)\cdot\sin\alpha$

$=\sin(\gamma-\alpha-\alpha)$

$=\sin\gamma$

5) $\sin 70°\cdot\cos 10°-\cos 70°\cdot\sin 10°=?$

$=\sin(70°-10°)$

$=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$6)\ \frac{tg30^\circ + tg15^\circ}{1 - tg30^\circ \cdot tg15^\circ} = ?$$
$$= tg\left(30^\circ + 15^\circ\right) = tg45^\circ = 1$$

$$7)\ \frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ} = ?$$
$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 15^\circ}{1+\tan 45^\circ \cdot \tan 15^\circ} = \tan\left(45^\circ - 15^\circ\right)$$
$$= \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

سوال: $\sin 15^\circ$ مساوی است به:

حل سوال:

$$\sin 15^\circ = \sin\left(45^\circ - 30^\circ\right)$$
$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$
$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

سوال: $\cos 75^\circ$ مساوی است به:

حل سوال:

$$\cos 75^\circ = \cos\left(45^\circ + 30^\circ\right)$$
$$\cos 75^\circ = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$
$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

سوال: افاده ذیل مساوی است به:

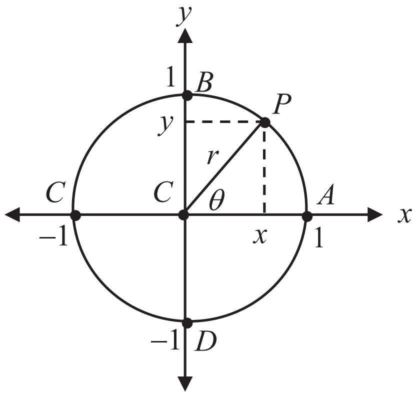
حل سوال:

$$\cos(x+y)\cos(x-y) - \sin(x+y)\sin(x-y) = ?$$
$$= \cos\left[(x+y)+(x-y)\right]$$
$$= \cos\left[x+y+x-y\right]$$
$$= \cos 2x$$

نسبت های مثلثاتی زاویه های کوادرانتل یا زاویه های محوری:

زاویه های 0°، 90°، 180°، 270° و 360° بنام زاویه های کوادرانتل یا زاویه های محوری یاد میشوند.

دایره مثلثاتی یا دایره واحد: دایره است که شعاع آن یک واحد باشد.



ضلع مقابل همیشه مساوی به y میباشد.

ضلع مجاور همیشه مساوی به x میباشد.

وتر مثلث مساوی به شعاع دایره میباشد. $r=1$

$$\theta = 0^\circ \to A(1\ ,\ 0)$$
$$\theta = 90^\circ \to B(0\ ,\ 1)$$
$$\theta = 180^\circ \to C(-1\ ,\ 0)$$
$$\theta = 270^\circ \to D(0\ ,\ -1)$$
$$\theta = 360^\circ \to A(1\ ,\ 0)$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 0°: اگر نقطه P بالای نقطه A منطبق شود زاویه 0° میباشد.

$$A(1,0), x=1, y=0, r=1$$

$$\sin 0^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 0^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 0^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $90°$: اگر نقطه P بالای نقطه B منطبق شود زاویه $90°$ میباشد.

$$B(0,1), x=0, y=1, r=1$$

$$\sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\cot 90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 90° = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\csc 90° = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $180°$: اگر نقطه P بالای نقطه C منطبق شود زاویه $180°$ میباشد.

$$C(-1,0), x=-1, y=0, r=1$$

$$\sin 180° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 180° = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\tan 180° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\cot 180° = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$\sec 180° = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\csc 180° = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} = \infty$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $270°$: اگر نقطه P بالای نقطه D منطبق شود زاویه $270°$ میباشد.

$$D(0,-1), x=0, y=-1, r=1$$

$$\sin 270° = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\cos 270° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 270° = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\cot 270° = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec 270° = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\csc 270° = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} = \infty$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $360°$: اگر نقطه P بالای نقطه A منطبق شود زاویه $360°$ میباشد.

$$A(1,0), x=1, y=0, r=1$$

$$\sin 360° = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 360° = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 360° = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 360° = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 360° = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 360° = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

دریافت نسبت های مثلثاتی زاویه های کوادرانتل یا زاویه های محوری توسط مجموع و تفاضل دو زاویه:

برای این منظور sin و cos آنها را با استفاده از فورمول های مجموع و تفاضل دریافته و برای دریافت سایر نسبت های مثلثاتی از روابط اساسی مثلثات استفاده میکنیم.

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه $0°$ را دریابید؟

حل سوال:

$$\sin 0° = \sin(30° - 30°)$$

$$\sin 0° = \sin 30° \cdot \cos 30° - \cos 30° \cdot \sin 30°$$

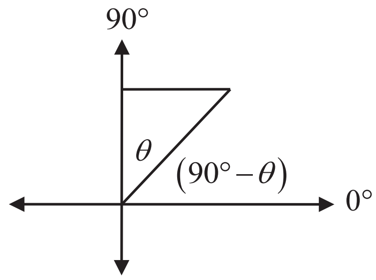
$$\sin 0° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sin 0^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\sin 0^\circ = 0$$
$$\cos 0^\circ = \cos(45^\circ - 45^\circ)$$
$$\cos 0^\circ = \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$$
$$\cos 0^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 0^\circ = \frac{2}{4} + \frac{2}{4}$$
$$\cos 0^\circ = \frac{4}{4}$$
$$\cos 0^\circ = 1$$
$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$
$$\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$
$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\csc 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$$

فورمول های که از نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه حاصل میشوند: بادرنظرداشت فورمول های مجموع و تفاضل دو زاویه، برای زاویه های کوادرانتل فورمول های ذیل حاصل میشوند.

نسبت های مثلثاتی زاویه های $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ یا $(90^\circ - \theta)$:

زاویه در ناحیه اول قرار دارد.



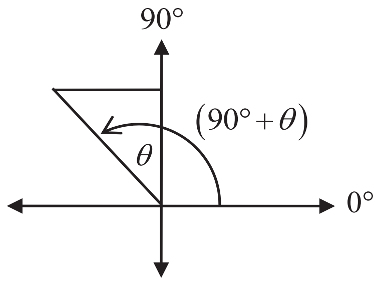
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta - \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 1 \cdot \cos\theta - 0 \cdot \sin\theta$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = +\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\theta + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$
$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

با درنظرداشت روابط فوق میتوانیم بنویسیم که:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = +\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = +\sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = +\cot\theta$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = +\tan\theta$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = +\csc\theta$$
$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = +\sec\theta$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ یا $(90^\circ+\theta)$:

زاویه در ناحیه دوم قرار دارد.



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=+\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

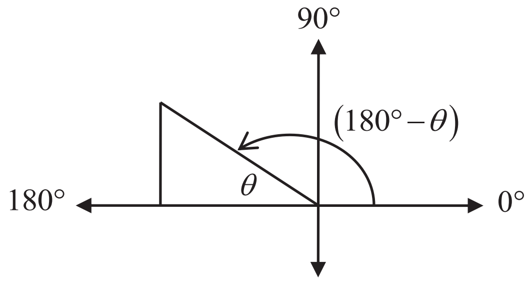
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\csc\theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=+\sec\theta$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $(\pi-\theta)$ یا $(180^\circ-\theta)$:

زاویه در ناحیه دوم قرار دارد.



$$\sin(\pi-\theta)=\sin\pi\cdot\cos\theta-\cos\pi\cdot\sin\theta$$

$$\sin(\pi-\theta)=0\cdot\cos\theta-(-1)\cdot\sin\theta$$

$$\sin(\pi-\theta)=+\sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta)=\cos\pi\cdot\cos\theta+\sin\pi\cdot\sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta)=(-1)\cdot\cos\theta+0\cdot\sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(\pi-\theta)}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

$$\cot(\pi-\theta)=\frac{1}{\tan(\pi-\theta)}=\frac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta$$

$$\sec(\pi-\theta)=\frac{1}{\cos(\pi-\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(\pi-\theta)=\frac{1}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{1}{\sin\theta}=+\csc\theta$$

با درنظرداشت روابط فوق میتوانیم بنویسیم که:

$$\sin(\pi-\theta)=+\sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

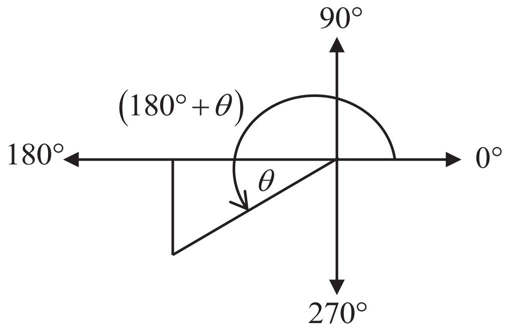
$$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$$

$$\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$$

$$\csc(\pi-\theta)=+\csc\theta$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $(\pi+\theta)$ یا $(180^\circ+\theta)$:

زاویه در ناحیه سوم قرار دارد.



$$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(\pi+\theta)=+\tan\theta$$

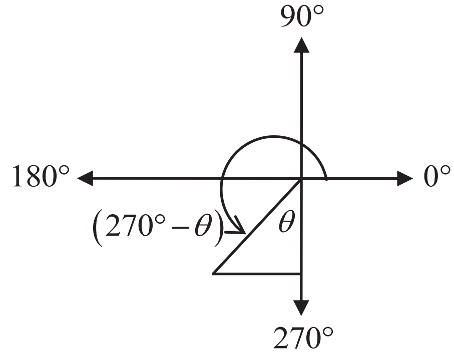
$$\cot(\pi+\theta)=+\cot\theta$$

$$\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$$

$$\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$ یا $(270^\circ-\theta)$:

زاویه در ناحیه سوم قرار دارد.



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\cos\theta-\cos\frac{3\pi}{2}\cdot\sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=(-1)\cdot\cos\theta-0\cdot\sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cos\frac{3\pi}{2}\cdot\cos\theta+\sin\frac{3\pi}{2}\cdot\sin\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=0\cdot\cos\theta-1\cdot\sin\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=+\cot\theta$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{1}{\cot\theta}=+\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

با درنظرداشت روابط فوق میتوانیم بنویسیم که:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=+\cot\theta$$

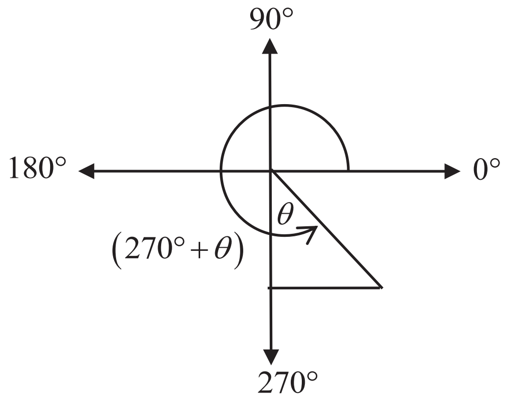
$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=+\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\csc\theta$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sec\theta$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$ یا $(\theta+270^\circ)$: $(270^\circ+\theta)$

زاویه در ناحیه سوم قرار دارد.



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=+\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

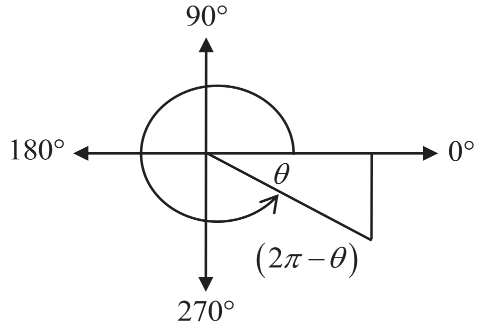
$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=+\csc\theta$$

$$\csc\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\sec\theta$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $(\theta-2\pi)$ **یا** $(\theta-360^\circ)$**:**

زاویه در ناحیه چهارم قرار دارد.



$$\sin(2\pi-\theta)=\sin2\pi\cdot\cos\theta-\cos2\pi\cdot\sin\theta$$

$$\sin(2\pi-\theta)=0\cdot\cos\theta-(1)\cdot\sin\theta$$

$$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(2\pi-\theta)=\cos2\pi\cdot\cos\theta+\sin2\pi\cdot\sin\theta$$

$$\cos(2\pi-\theta)=(-1)\cdot\cos\theta+0\cdot\sin\theta$$

$$\cos(2\pi-\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(2\pi-\theta)=\frac{\sin(2\pi-\theta)}{\cos(2\pi-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{+\cos\theta}=-\tan\theta$$

$$\cot(2\pi-\theta)=\frac{1}{\tan(2\pi-\theta)}=\frac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta$$

$$\sec(2\pi-\theta)=\frac{1}{\cos(2\pi-\theta)}=\frac{1}{+\cos\theta}=+\sec\theta$$

$$\csc(2\pi-\theta)=\frac{1}{\sin(2\pi-\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

با درنظرداشت روابط فوق میتوانیم بنویسیم که:

$$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(2\pi-\theta)=+\cos\theta$$

$$\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$$

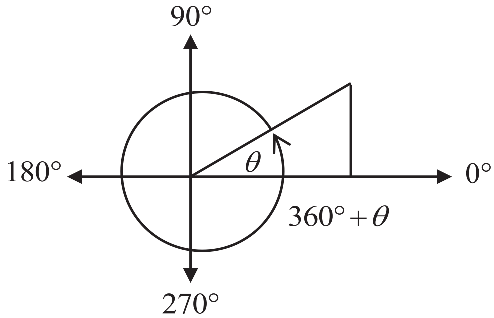
$$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$$

$$\sec(2\pi-\theta)=+\sec\theta$$

$$\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$$

نسبت های مثلثاتی زاویه $(\theta+2\pi)$ **یا** $(\theta+360^\circ)$**:**

حل سوال: زاویه در ناحیه اول قرار دارد.



$$\sin(2\pi+\theta)=+\sin\theta$$

$$\cos(2\pi+\theta)=+\cos\theta$$

$$\tan(2\pi+\theta)=+\tan\theta$$

$$\cot(2\pi+\theta)=+\cot\theta$$

$$\sec(2\pi+\theta)=+\sec\theta$$

$$\csc(2\pi+\theta)=+\csc\theta$$

یادداشت: بین نسبت های مثلثاتی زاویه های $A-B$ و $B-A$ روابط ذیل وجود دارد.

$$\sin(B-A)=-\sin(A-B)$$

$$\cos(B-A)=+\cos(A-B)$$

$$tg(B-A)=-tg(A-B)$$

$$\cot(B-A)=-\cot(A-B)$$

$$\sec(B-A)=+\sec(A-B)$$

$$\csc(B-A)=-\csc(A-B)$$

افاده های داده شده را ساده سازید؟

1) $\tan(2\pi+x)=\tan x$

2) $\tan(2\pi-x)=-\tan x$

3) $\csc(2\pi-x)=-\csc x$

4) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\csc x$

$5)\ \cot(\pi+x)=+\cot x$

$6)\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(\sec x-\cos x)=?$

$=(\cos x)\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x\right)$

$=1-\cos^2 x$

$=\sin^2 x$

$7)\ \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x-\pi)=?$

$=+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin(\pi-x)$

$=\sin x+\sin x$

$=2\sin x$

$8)\ \frac{\sin(90°+x)\cdot\sec(270°+x)\cdot\sin(180°+x)}{\csc(-x)\cdot\cos(270°-x)\cdot tg(180°+x)}=?$

$=\frac{\cos x\cdot\csc x\cdot(-\sin x)}{-\csc x\cdot(-\sin x)\cdot tgx}=\frac{\cos x\cdot\frac{1}{\cancel{\sin x}}\cdot(-\cancel{\sin x})}{-\frac{1}{\cancel{\sin x}}\cdot(-\cancel{\sin x})\cdot tgx}$

$=\frac{-\cos x}{+tgx}=-\frac{\frac{\cos x}{1}}{\frac{\sin x}{\cos x}}=-\frac{\cos^2 x}{\sin x}=-\cos^2 x\cdot\csc x$

$9)\ \cos(\pi-a)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=?$

$=-\cos a+\cos a$

$=0$

$10)\ \frac{\cos(90°+x)\cdot\sec(-x)\cdot tg(180°-x)}{\sec(360°-x)\cdot\sin(180°+x)\cdot cotg(90°+x)}=?$

$=\frac{-\sin x\cdot\sec x\cdot tgx}{\sec x\cdot(-\sin x)\cdot(-tgx)}=\frac{-\cancel{\sin x}\cdot\cancel{\sec x}\cdot\cancel{tgx}}{+\cancel{\sec x}\cdot\cancel{\sin x}\cdot\cancel{tgx}}$

$=-1$

$11)\ \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x+\pi)=?$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi+x)$

$=-\cos x-\cos x$

$=-2\sin x$

$12)\ \sin 120°=\sin(90°+30°)=+\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$13)\ \cos 120°=\cos(90°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

$14)\ \tan 120°=\tan(90°+30°)=-\cot 30°=-\sqrt{3}$

$15)\ \sin 210°=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

$16)\ \cos 210°=\cos(180°+30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$17)\ \tan 210°=\tan(180°+30°)=+\tan 30°=+\frac{\sqrt{3}}{3}$

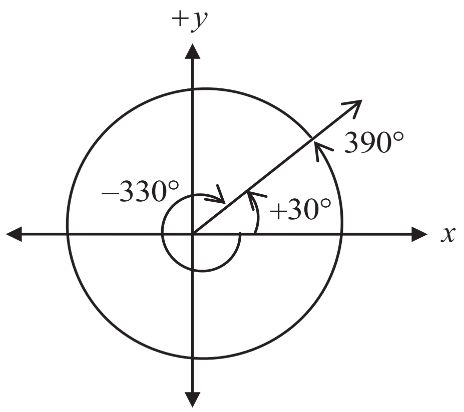
$18)\ \sin 300°=\sin(360°-60°)=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$19)\ \cos 300°=\cos(270°+30°)=-\sin 30°=-\frac{1}{2}$

$20)\ \tan 315°=\tan(360°-45°)=-\tan 45°=-1$

زاویه های کوترمینل: عبارت از زاویه های هستند که در حالت ستندرد اضلاع دوم آنها با هم منطبق باشند.

هر زاویه بینهایت زاویهٔ کوترمینل دارد. نسبت های مثلثاتی تمام زاویه های کوترمینل مساوی میباشند. قرار شکل:



زاویه های $30°$، $390°$ و $-330°$ باهم کوترمینل میباشند وتمام نسبت های مثلثاتی هرسه زاویه باهم مساوی میباشند.

$\sin 30°=\sin 390°=\sin(-330)°=\frac{1}{2}$

فورمول دریافت زاویه های کوترمینل یک زاویه: برای دریافت زاویه های کوترمینل یک زاویه مانند تیتا θ از رابطه ذیل استفاده میکنیم.

$$C_n = \theta^R \pm n \cdot 2\pi$$
$$C_n = \theta^\circ \pm n \cdot 360^\circ$$

سوال: شش زاویه کوترمینل زاویه 30° را دریابید؟

حل سوال:

$$\theta = 30^\circ, C = \theta \pm n \cdot 360^\circ$$
$$C_1 = 30^\circ + 1 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 360^\circ = 390^\circ$$
$$C_2 = 30^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 720^\circ = 750^\circ$$
$$C_3 = 30^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 1080^\circ = 1110^\circ$$
$$C_4 = 30^\circ + 4 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 1440^\circ = 1470^\circ$$
$$C_5 = 30^\circ + 10 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 3600^\circ = 3630^\circ$$
$$C_6 = 30^\circ + 20 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 7200^\circ = 7230^\circ$$

سوال: چهار زاویه منفی کوترمینل زاویه 30° را دریابید؟

حل سوال:

$$\theta = 30^\circ, C = \theta \pm n \cdot 360^\circ$$
$$C_1 = 30^\circ - 1 \cdot 360^\circ = 30^\circ - 360^\circ = -330^\circ$$
$$C_2 = 30^\circ - 2 \cdot 360^\circ = 30^\circ - 720^\circ = -690^\circ$$
$$C_3 = 30^\circ - 3 \cdot 360^\circ = 30^\circ - 1080^\circ = -1050^\circ$$
$$C_4 = 30^\circ - 10 \cdot 360^\circ = 30^\circ - 3600^\circ = -3570^\circ$$

سوال: چهار زاویه کوترمینل زاویه $\frac{\pi}{6}$ را دریابید؟

حل سوال:

$$\theta = \frac{\pi}{6}, C = \theta \pm n \cdot 2\pi$$
$$C_1 = \frac{\pi}{6} + 1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$$
$$C_2 = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$$
$$C_3 = \frac{\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + 6\pi = \frac{37\pi}{6}$$
$$C_4 = \frac{\pi}{6} + 4 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6} + 8\pi = \frac{49\pi}{6}$$

دریافت کوچکترین زاویه کوترمینل یک زاویه: اگر یک زاویه بزرگتر از 360° باشد آنرا بالای 360° تقسیم نموده که خارج قسمت تعداد دور مکمل و باقیمانده کوچکترین زاویه کوترمینل میباشد.

سوال: کوچکترین زاویۀ کوترمینل 3630° را دریابید؟

حل سوال:

$$\begin{array}{r|l} 3630 & 360 \\ \cline{2-2} 360 & 1 \\ \hline 30 & \end{array}$$

تعداد دور مکمل مساوی به 1 دور مکمل میباشد.

کوچکترین زاویه کوترمینل 30° میباشد.

سوال: نسبت های مثلثاتی زاویه 3630° را دریابید؟

حل سوال:

$$\sin 3630^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\cos 3630^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 3630^\circ = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

سوال: کوچکترین زاویۀ کوترمینل 7770° را دریابید؟

حل سوال:

$$\begin{array}{r|l} 7770 & 360 \\ \cline{2-2} 720 & 21 \\ \hline 570 & \\ 360 & \\ \hline 210 & \end{array}$$

تعداد دور مکمل مساوی به 21 دور مکمل میباشد.

کوچکترین زاویه کوترمینل 210° میباشد.

سوال: نسبت های مثلثاتی زاویه 7770° را دریابید؟

حل سوال:

$$\sin 7770^\circ = \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ)$$
$$= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\cos 7770^\circ = \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ)$$
$$= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg7770^\circ = tg210^\circ = tg(180^\circ + 30^\circ)$$
$$= +tg30^\circ = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

فورمول:

الف: اگر ضریب π یکعدد جفت باشد افاده $n\pi \pm \theta = 2\pi \pm \theta$ وضع کرده و افاده را ساده میسازیم.

ب: اگر ضریب π یکعدد تاق باشد افاده $n\pi \pm \theta = \pi \pm \theta$ وضع کرده و افاده را ساده میسازیم.

ج: اگر ضریب π یکعدد مانند 0.5، 2.5، 4.5، 6.5 یعنی عدد جفت اعشاریه پنج باشد افاده $n\pi \pm \theta = \frac{\pi}{2} \pm \theta$ وضع کرده و افاده را ساده میسازیم.

د: اگر ضریب π یکعدد مانند 1.5، 3.5، 5.5، 7.5 یعنی عدد تاق اعشاریه پنج باشد افاده $n\pi \pm \theta = \frac{3\pi}{2} \pm \theta$ وضع کرده و

زاویه های کوترمینل زاویه 0^R یا 2π:

$$0^R = 2\pi = 4\pi = 6\pi = 8\pi = 10\pi = \ldots$$

زاویه های کوترمینل زاویه 90° یا $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{1\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} = \frac{9\pi}{2} = \frac{13\pi}{2} = \frac{17\pi}{2} = \ldots$$
$$0.5\pi = 2.5\pi = 4.5\pi = 6.5\pi = 8.5\pi = \ldots$$

زاویه های کوترمینل زاویه 180° یا π:

$$1\pi = 3\pi = 5\pi = 7\pi = 9\pi = 11\pi = \ldots$$

زاویه های کوترمینل زاویه 270° یا $\frac{3\pi}{2}$:

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{2} = \frac{11\pi}{2} = \frac{15\pi}{2} = \frac{19\pi}{2} = \ldots$$
$$1.5\pi = 3.5\pi = 5.5\pi = 7.5\pi = 9.5\pi = \ldots$$

افاده های ذیل را ساده سازید:

1) $\cos(3\pi + x) + \cos(6\pi - x) = ?$
$= \cos(\pi + x) + \cos(2\pi - x)$
$= -\cos x - \cos x$
$= -2\cos x$

2) $\sin\left(\frac{17\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = +\cos x$

3) $\sin(24\pi - x) = \sin(2\pi - x) = -\sin x$

4) $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$

5) $\sin(17\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$

6) $\sin(720^\circ - x) + \cos(450^\circ + x) - 3 = ?$
$= \sin(4\pi - x) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 3$
$= \sin(2\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3$
$= -\sin x - \sin x - 3$
$= -2\sin x - 3$

روابط بین نسبت های مثلثاتی یک زاویه و نصف آن: بین نسبت های مثلثاتی یک زاویه و نصف آن روابط ذیل وجود دارند.

1) $\sin 2\theta = 2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$

2) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

3) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

4) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

5) $\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

6) $\cot 2\theta = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta}$

افاده های مثلثاتی داده شده را ساده سازید:

1) $2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta = \sin 2\theta$

2) $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

3) $2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = \sin x$

4) $2\sin\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{4} = \sin\frac{x}{2}$

5) $2\sin\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} = \sin 3x$

6) $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot 2\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

7) $4\sin 3x \cdot \cos 3x = 2 \cdot 2\sin 3x\cos 3x = 2\sin 6x$

8) $\sin 40^\circ = 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ$

9) $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$10)\ \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$$

$$11)\ \cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{4}-1$$

$$10)\ \cos\frac{3x}{2}=1-2\sin^2\frac{3x}{4}$$

$$11)\ \frac{\sin 4x+\sin 2x}{2\cos^2 2x-2\sin^2 x+1}=\frac{2\sin 2x\cos 2x+\sin 2x}{2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+1}$$

$$=\frac{\sin 2x\left(\cancel{2\cos 2x+1}\right)}{\cancel{2\cos 2x+1}}=\frac{\sin 2x}{1}=\sin 2x$$

$$12)\frac{\sin 24^\circ}{\sin 6^\circ}+\frac{\cos 24^\circ}{\cos 6^\circ}=\frac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ+\cos 24^\circ\sin 6^\circ}{\sin 6^\circ\cos 6^\circ}$$

$$=\frac{\sin\left(24^\circ+6^\circ\right)}{\frac{1}{2}\cdot 2\sin 6^\circ\cos 6^\circ}=\frac{\sin 30^\circ}{\frac{1}{2}\sin 12^\circ}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\sin 12^\circ}$$

$$=\frac{1}{\sin 12^\circ}=\csc 12^\circ$$

$$13)\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 40^\circ}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos 40^\circ}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 20^\circ}=\sqrt{\frac{1+\cos 20^\circ}{2}}=\cos 10^\circ$$

نسبت های مثلثاتی سه چند یک زاویه: اگر یک زاویهٔ مانند θ را در نظر بگیریم، نسبت های مثلثاتی 3θ از روابط ذیل دریافت میشوند.

$$1)\ \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

$$2)\ \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$3)\ \tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

افاده های ذیل را ساده سازید:

$$1)\ 3\sin x-4\sin^3 x=\sin 3x$$

$$2)\ 3\sin 2x-4\sin^3 2x=\sin 6x$$

$$3)\ 4\cos^3\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}=\cos 3\cdot\frac{x}{2}=\cos\frac{3x}{2}$$

$$4)\ 4\cos^3\frac{5x}{6}-3\cos\frac{5x}{6}=\cos 3\cdot\frac{5x}{6}=\cos\frac{5x}{2}$$

$$5)\ \frac{3\tan 2x-\tan^3 2x}{1-3\tan^2 2x}=\tan 6x$$

$$6)\ \frac{3\tan 10^\circ-\tan^3 10^\circ}{1-3\tan^2 10^\circ}=\tan 3\cdot 10^\circ=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

دریافت نسبت های مثلثاتی یک زاویه از جنس کوساین دو چند آن زاویه: برای این منظور روابط ذیل وجود دارند.

$$1)\ \sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$2)\ \cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$3)\ \tan\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

سوال: نسبت های مثلثاتی زاویه 30° را دریابید؟

حل سوال:

$$1)\ \sin 30^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{1}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$2)\ \cos 30^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 60^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{1}}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3)\ \tan 30^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{1+\cos 60^\circ}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

دریافت نسبت های مثلثاتی یک زاویه از جنس تانجانت نصف آن: برا ی این منظور از روابط ذیل استفاده میکنیم.

$$1)\ \sin 2\theta=\frac{2tg\theta}{1+tg^2\theta}$$

$$2)\ \cos 2\theta=\frac{1-tg^2\theta}{1+tg^2\theta}$$

$$3)\ \tan 2\theta = \frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta}$$

سوال: اگر $tg\frac{x}{2} = 2$ باشد، نسبت های مثلثاتی زاویهٔ x را دریابید؟

حل سوال:

$$1)\ \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cdot 2}{1+(2)^2} = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}$$

$$2)\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-(2)^2}{1+(2)^2} = \frac{1-4}{1+4} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$3)\ \tan x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cdot 2}{1-(2)^2} = \frac{4}{1-4} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

تبدیل مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی به حاصل ضرب: برای این منظور از روابط ذیل استفاده میشود.

مجموع و تفاضل ساین دو زاویهٔ مانند p و q از روابط ذیل دریافت میشوند.

$$1)\ \sin p + \sin q = 2\cdot\sin\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$2)\ \sin p - \sin q = 2\cdot\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$$

مجموع و تفاضل کوساین های دو زاویهٔ مانند p و q از روابط ذیل دریافت میشود.

$$1)\ \cos p + \cos q = 2\cdot\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$2)\ \cos p - \cos q = -2\cdot\sin\frac{p+q}{2}\cdot\sin\frac{p-q}{2}$$

مجموع و تفاضل تانجانت دو زاویهٔ مانند p و q از روابط ذیل دریافت میشوند.

$$1)\ \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

$$2)\ \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

مجموع و تفاضل کوتانجانت دو زاویهٔ مانند p و q از روابط ذیل دریافت میشوند.

$$1)\ \cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p\cdot\sin q}$$

$$2)\ \tan p - \tan q = -\frac{\sin(p-q)}{\sin p\cdot\sin q}$$

افاده های مثلثاتی ذیل را ساده سازید:

$$1)\ \sin 4x + \sin 2x = 2\cdot\sin\frac{4x+2x}{2}\cdot\cos\frac{4x-2x}{2}$$
$$= 2\sin\frac{6x}{2}\cdot\cos\frac{2x}{2} = 2\sin 3x\cdot\cos x$$

$$2)\ \sin 4x - \sin 10x = 2\cdot\sin\frac{4x-10x}{2}\cdot\cos\frac{4x+10x}{2}$$
$$= 2\sin\frac{-6x}{2}\cdot\cos\frac{14x}{2} = 2\sin(-3x)\cdot\cos 7x$$
$$= -2\sin 3x\cdot\cos 7x$$

$$3)\ \frac{\sin 7x + \sin 3x}{\cos 7x + \cos 3x} = \frac{\cancel{2}\cdot\sin\frac{7x+3x}{2}\cdot\cancel{\cos\frac{7x-3x}{2}}}{\cancel{2}\cdot\cos\frac{7x+3x}{2}\cdot\cancel{\cos\frac{7x-3x}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\frac{10x}{2}}{\cos\frac{10x}{2}} = \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \tan 5x$$

$$4)\ \frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ - \cos 15^\circ} = ?$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cdot\cancel{\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}}}{\cancel{2}\cdot\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\cdot\cancel{\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\frac{60^\circ}{2}}{\cos\frac{60^\circ}{2}} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \tan 30^\circ$$

$$5)\ \frac{\sin 77^\circ + \cos 47^\circ}{\sin 73^\circ} = \frac{\sin 77^\circ + \sin 43^\circ}{\sin 73^\circ}$$

$$= \frac{2\sin\frac{77^\circ+43^\circ}{2}\cdot\cos\frac{77^\circ-43^\circ}{2}}{\sin 73^\circ}$$

$$=\frac{2\sin\frac{120^\circ}{2}\cdot\cos\frac{34^\circ}{2}}{\sin 73^\circ}=\frac{2\sin 60^\circ\cdot\cos 17^\circ}{\sin 73^\circ}$$

$$=\frac{\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{\sin 73^\circ}}{\cancel{\sin 73^\circ}}=\sqrt{3}$$

6) $\sin 105^\circ+\sin 15^\circ=?$

$$=2\sin\frac{105^\circ+15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{105^\circ-15^\circ}{2}$$

$$=2\sin\frac{120^\circ}{2}\cdot\cos\frac{90^\circ}{2}=2\sin 60^\circ\cdot\cos 45^\circ$$

$$=\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

7) $\sin\frac{3\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}=2\sin\frac{\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}}{2}$

$$=2\sin\frac{\frac{3\pi-\pi}{8}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{3\pi+\pi}{8}}{2}=2\sin\frac{\frac{2\pi}{8}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{4\pi}{8}}{2}$$

$$=2\sin\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{2}{1}}\cdot\cos\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{2}{1}}=2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}=\sin 2\cdot\frac{\pi}{8}$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

8) $\sin 40^\circ+\cos 70^\circ=\cos 50^\circ+\cos 70^\circ$

$$=2\cos\frac{50^\circ+70^\circ}{2}\cdot\cos\frac{50^\circ-70^\circ}{2}$$

$$=2\cos\frac{120^\circ}{2}\cdot\cos\frac{-20^\circ}{2}=2\cos 60^\circ\cdot\cos(-20^\circ)$$

$$=\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cos 20^\circ=\cos 20^\circ$$

9) $tg75^\circ+tg15^\circ=\frac{\sin(75^\circ+15^\circ)}{\cos 75^\circ\cdot\cos 15^\circ}$

$$=\frac{\sin 90^\circ}{\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\sin 30^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$

$$\frac{1}{\sin 15^\circ}+\frac{1}{\cos 15^\circ}=?$$

$$=\frac{\cos 15^\circ+\sin 15^\circ}{\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ}=\frac{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}{\frac{1}{2}\cdot 2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ}$$

$$=\frac{2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cdot\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ}$$

$$=\frac{2\sin\frac{90^\circ}{2}\cdot\cos\frac{60^\circ}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2\sin 45^\circ\cdot\cos 30^\circ}{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\cdot 1}=2\sqrt{6}$$

روابط تبدیل حاصل ضرب به مجموع وتفاضل زوایا: برای این منظور از روابط ذیل استفاده میشود.

1) $\sin A\cdot\cos B=\frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$

2) $\cos A\cdot\cos B=\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$

3) $\sin A\cdot\sin B=-\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)-\cos(A-B)\right]$

افاده های مثلثاتی داده شده را ساده سازید:

1) $\cos\frac{\pi}{8}\cdot\sin\frac{3\pi}{8}=?$

$$=\sin\frac{3\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{4\pi}{8}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right]=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

2) $\cos 105^\circ\cdot\cos 15^\circ=?$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos(105^\circ+15^\circ)+\cos(105^\circ-15^\circ)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos 120^\circ+\cos 90^\circ\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}+0\right]=-\frac{1}{4}$$

3) $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ = ?$

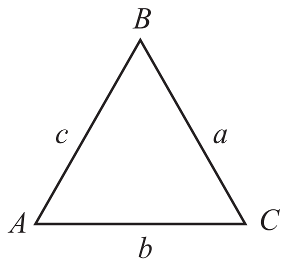
$$= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(75^\circ + 15^\circ\right) - \cos\left(75^\circ - 15^\circ\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\cos\left(90^\circ\right) - \cos\left(60^\circ\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[0 - \frac{1}{2}\right] = +\frac{1}{4}$$

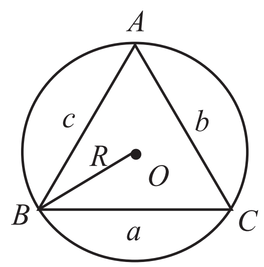
مطالعه روابط بین اضلاع و زوایاي یك مثلث:

قضیه ساین: اگر طول سه ضلع مثلث را به a، b، c و سه زاویه مثلث را به A، B و C نشان دهیم، درهر مثلث رابطه ذیل وجود دارد که بنام قانون ساین یا قضیه ساین یاد میشود.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

همچنان قضیه ساین به شکل ذیل نیز ارایه میشود.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

در رابطهٔ فوق R شعاع دایره محیطي مثلث میباشد.

یادداشت: از قانون ساین وقتی استفاده شده میتواند که:

الف: اندازه دو زاویه و یک ضلع که در مقابل زاویه معلوم باشد داده شده باشد.

ب: اندازه دو ضلع ویک زاویه که در مقابل اضلاع معلوم باشد داده شده باشد.

قضیه کوساین: در هر مثلث روابط ذیل وجود دارند که قضیه کوساین نامیده میشوند.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

همچنان قضیه کوساین طور ذیل نیز ارایه میشود.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

یادداشت: از قانون کوساین وقتی استفاده شده میتواند که:

الف: اندازه دو ضلع و یک زاویه مابین آن دو ضلع معلوم باشد.

ب: اندازه سه ضلع مثلث معلوم باشد.

روابط کوساین: درهر مثلث ABC روابط ذیل وجود دارند که روابط کوساین نامیده میشوند.

$$a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$

$$b = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A$$

$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$$

قضیه تانجانت: در هر مثلث ABC روابط ذیل وجود دارند که بنام قانون تانجانت یا قضیه تانجانت نامیده میشوند.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{tg\frac{A+C}{2}}{tg\frac{A-C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{tg\frac{B+C}{2}}{tg\frac{B-C}{2}}$$

فورمول هاي مولوید (Mollwied Formulas):

فورمول اول: در هر مثلث رابطه ذیل وجود دارد.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

فورمول دوم: در هر مثلث رابطه ذیل وجود دارد.

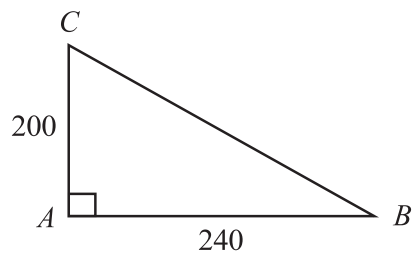
$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

جدول نسبت های مثلثاتی: جدول نسبت های مثلثاتی بادرنظرداشت روابط بین زاویه های مکمله ترتیب شده است.

حل مثلث های قایم الزاویه: درصورتیکه یک زاویهٔ حاده و یک ضلع مثلث قایم الزاویه معلوم باشد، زاویهٔ حادهٔ دوم آنرا میتوانیم از رابطهٔ $90°-\theta$ دریابیم. همچنان با استفاده از جدول و تعریف نسبت های مثلثاتی متیوانیم طول اضلاع مثلث را نیز محاسبه کنیم.

هدف از حل مثلث دریافت زاویه ها واضلاع نامعلوم مثلث میباشد.

سوال: قرار شکل ذیل مثلث را حل کنید:

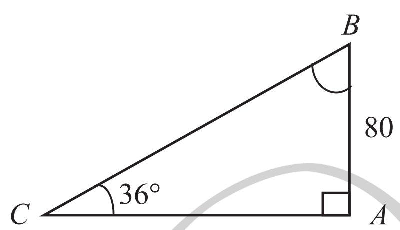


حل سوال:

$$(BC)^2=(AC)^2+(AB)^2$$
$$(BC)^2=(200)^2+(240)^2$$
$$(BC)^2=40000+57600$$
$$(BC)^2=97600/\sqrt{\ }$$
$$BC=\sqrt{97600}$$
$$BC=312.4$$

$$\tan B=\frac{AC}{AB}=\frac{200}{240}=0.83$$
$$\tan 40°=0.83$$
$$B=40°$$
$$C=90°-40°\rightarrow C=50°$$

سوال: قرار شکل زیر مثلث را حل کنید:



حل سوال:

$$B=90°-36°\rightarrow B=54°$$

$$\sin 36°=\frac{AB}{BC}\rightarrow 0.59=\frac{80}{BC}\rightarrow BC=\frac{80}{0.59}$$

$$BC=\frac{80.00}{0.59}\rightarrow BC=\frac{8000}{59}\rightarrow BC=136$$

$$\cos 36°=\frac{AC}{BC}\rightarrow 0.81=\frac{AC}{136}\rightarrow AC=0.81\cdot 136$$
$$AC=110$$

دریافت نسبت های مثلثاتی زاویه های که در جدول موجود نیستند: برای این منظور از نسبت های مثلثاتی زاویه های موجود در جدول استفاده میشود. در مثلثات دریافت نسبت های مثلثاتی زاویه های که در جدول وجود ندارند بنام انترپولیشن یاد میشود و طور ذیل اجرا میشود.

الف: تفاوت دو زاویهٔ انتخاب شده از جدول را دریافت میکنیم و آنرا به حرف a نشان میدهیم.

ب: نسبت های مثلثاتی آنها را با استفاده از جدول تعیین کرده، تفاوت آنها را نیز دریافته و به حرف b نشان میدهیم.

ج: تفاوت زاویهٔ را که نسبت آن خواسته شده است با زاویهٔ کوچک انتخاب شده دریافته و به حرف c نشان میدهیم.

د: از رابطهٔ $x=\frac{b\cdot c}{a}$ قیمت x را دریافت میکنیم.

هـ: قیمت x را با نسبت مثلثاتی زاویهٔ کوچک جمع کرده، درنتیجه نسبت مثلثاتی زاویهٔ که در جدول موجود نیست دریافت میشود.

سوال: $\sin(30°,20')$ را دریابید؟

حل سوال:

$$30°<30°,20'<31°$$

$$a=31°-30°\rightarrow a=1°$$

$$\sin 31°=0.5150$$
$$\sin 30°=0.5000$$
$$b=\sin 31°-\sin 30°$$
$$b=0.5150-0.5000\rightarrow b=0.0150$$

$$c=30°,20'-30°\rightarrow c=20'$$

$$x=\frac{b\cdot c}{a}\rightarrow x=\frac{0.0150\cdot 20'}{1°}\rightarrow x=\frac{0.0150\cdot \cancel{20'}}{\cancel{60}^{3}}$$

$$x=\frac{0.0150}{3}\rightarrow x=0.0050$$

$$\sin 30°,20' = \sin 30° + x$$
$$\sin 30°,20' = 0.5000 + 0.0050$$
$$\sin 30°,20' = 0.5050$$

سوال: $\cos(10°,45')$ را دریابید؟

حل سوال:

$$10° < 10°,45' < 11°$$

$$a = 11° - 10° \to a = 1°$$

$$\cos 11° = 0.9816$$
$$\cos 10° = 0.9848$$
$$b = \cos 11° - \cos 10°$$
$$b = 0.9816 - 0.9848 \to b = -0.0032$$

$$c = 10°,45' - 10° \to c = 45'$$

$$x = \frac{b \cdot c}{a} \to x = \frac{-0.0032 \cdot 45'}{1°} \to x = \frac{-0.0032 \cdot 45'}{60'}$$
$$x = \frac{-0.144}{60} \to x = -0.0024$$

$$\cos 10°,45' = \cos 10° + x$$
$$\cos 10°,45' = 0.9848 + (-0.0024)$$
$$\cos 10°,45' = 0.9848 - 0.0024$$
$$\cos 10°,45' = 0.9824$$

سوال: $\tan(40°,13')$ را دریابید؟

حل سوال:

$$40° < 40°,13' < 41°$$

$$a = 41° - 40° \to a = 1°$$

$$\tan 41° = 0.8693$$
$$\tan 40° = 0.8391$$
$$b = \tan 41° - \tan 40°$$
$$b = 0.8693 - 0.8391 \to b = 0.0302$$

$$c = 40°,13' - 40° \to c = 13'$$

$$x = \frac{b \cdot c}{a} \to x = \frac{0.0302 \cdot 13'}{1°} \to x = \frac{0.0302 \cdot 13'}{60'}$$
$$x = \frac{0.3926}{60} \to x = 0.0065$$

$$\tan 40°,13' = \tan 40° + x$$
$$\tan 40°,13' = 0.8391 + 0.0302$$
$$\tan 40°,13' = 0.8391 + 0.0302$$
$$\tan 40°,13' = 0.8693$$

معادلات مثلثاتی: مساوات مثلثاتی که برای بعضی قیمت های زاویه، هردو طرف مساوات باهم مساوی باشند، بنام معادله مثلثاتی یاد میشود.

جذور معادلات مثلثاتی یا حل معادلات مثلثاتی عبارت از زاویه های اند که در معادلات مثلثاتی صدق میکنند.

ابتدا با استفاده از روابط مثلثاتی معادله را ساده ساخته وبعداً جذور آنرا محاسبه میکنیم.

جذور معادلات مثلثاتی یا در یک انتروال معین خواسته میشوند ویا هم حل عمومی معادلات خواسته میشوند.

اشکال ساده و یا اشکال اصلی معادلات مثلثاتی قرار ذیل اند:

حالت اول: اگر معادلهٔ مثلثاتی شکل $a\sin x + b = 0$ را داشته باشد ویا به این شکل تبدیل شود حل عمومی آن از روابط ذیل دریافت میشود.

$$A = \{x / x = 2n\pi + \theta \wedge x = (2n+1)\pi - \theta\}$$

یا

$$A = \{x / x = n\pi + (-1)^n \theta\}$$

ویا

$$x = 2n\pi + \theta \wedge x = (2n+1)\pi - \theta$$

θ کوچکترین زاویه است که معادله را صدق میکند.

و k یا n شامل اعداد تام میباشد.

$$k, n = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$$

سوال: حل معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ را در انتروال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ دریابید؟

حل سوال:

$$2\sin x - \sqrt{2} = 0 \to 2\sin x = \sqrt{2} \,/ \div 2 \to \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\to \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 45°$$

سوال: حل معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ را در انتروال $[0, 2\pi]$ دریابید؟

حل سوال:

$$2\sin x-\sqrt{2}=0\rightarrow 2\sin x=\sqrt{2}\,/\div 2\rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ساین در ناحیه اول و دوم مثبت است.

$$x_1=45^\circ$$
$$x_2=90^\circ+45^\circ=135^\circ$$

سوال: حل عمومی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x-\sqrt{2}=0$ را دریابید؟

حل سوال:

$$2\sin x-\sqrt{2}=0\rightarrow 2\sin x=\sqrt{2}\,/\div 2\rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \theta=45^\circ=\frac{\pi}{4}$$

$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\theta\wedge x=(2k+1)\pi-\theta\right\}$$
$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\wedge x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}\right\}$$

یا

$$A=\left\{x\,/\,x=n\pi+(-1)^n\theta\right\}$$
$$A=\left\{x\,/\,x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$$

θ کوچکترین زاویه است که معادله را صدق میکند.

و k یا n شامل اعداد تام میباشد.

$$k,n=\{\ldots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\ldots\}$$

سوال: حل معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x-1=0$ را در انتروال $[0,2\pi]$ دریابید؟

حل سوال:

$$2\sin x-1=0\rightarrow 2\sin x=1\,/\div 2\rightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\Rightarrow x_1=30^\circ, x_2=150^\circ$$

سوال: حل عمومی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x-1=0$ را دریابید؟

حل سوال:

$$2\sin x-1=0\rightarrow 2\sin x=1\,/\div 2\rightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\Rightarrow \theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

$$A=\left\{x\,/\,x=2n\pi+\theta\wedge x=(2n+1)\pi-\theta\right\}$$
$$A=\left\{x\,/\,x=2n\pi+\frac{\pi}{6}\wedge x=(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}\right\}$$

یا

$$A=\left\{x\,/\,x=n\pi+(-1)^n\theta\right\}$$
$$A=\left\{x\,/\,x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$$

سوال: حل معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x+1=0$ را در انتروال $[0,2\pi]$ دریابید؟

حل سوال:

$$2\sin x+1=0\rightarrow 2\sin x=-1\,/\div 2\rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}$$

ساین در ناحیه سوم و چهارم منفی است.

$$2\sin x+1=0\rightarrow 2\sin x=-1\,/\div 2\rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}$$

$$\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$
$$\sin(360^\circ-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$
$$x_1=180^\circ+30^\circ=210^\circ$$
$$x_2=360^\circ-30^\circ=330^\circ$$

سوال: حل عمومی معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x+1=0$ را دریابید؟

حل سوال:

$$2\sin x+1=0\rightarrow 2\sin x=-1\,/\div 2\rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}$$

ساین در ناحیه سوم و چهارم منفی است. کوچکترین زاویه که ساین آن $-\frac{1}{2}$ است قرار ذیل میباشد.

$$\theta=180^\circ+30^\circ=210^\circ$$
$$\theta=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$$

$$A=\left\{x\,/\,x=2n\pi+\theta\wedge x=(2n+1)\pi-\theta\right\}$$
$$A=\left\{x\,/\,x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\wedge x=(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}\right\}$$

یا

$$A=\left\{x/x=n\pi+\left(-1\right)^{n}\theta\right\}$$
$$A=\left\{x/x=n\pi+\left(-1\right)^{n}\cdot\frac{7\pi}{6}\right\}$$

ویا

$$x=2n\pi+\theta\wedge x=\left(2n+1\right)\pi-\theta$$

$$x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\wedge x=\left(2n+1\right)\pi-\frac{\pi}{6}$$

سوال: حل معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x-3=0$ را دریابید؟

حل سوال:

$$2\sin x-3=0\rightarrow2\sin x=3/\div2\rightarrow\sin x=\frac{3}{2}=1.5$$

عدد 1.5 از ساحه تحول ساین خارج است بناءً معادله فوق حل ندارد.

حالت دوم: اگر معادلهٔ مثلثاتی شکل $a\cos x+b=0$ را داشته باشد ویا به این شکل تبدیل شود، حل عمومی آن از رابطهٔ ذیل دریافت میشود.

$$A=\left\{x/x=2n\pi+\theta\wedge x=2n\pi-\theta\right\}$$

یا

$$A=\left\{x/x=2n\pi\pm\theta\right\}$$

ویا

$$x=2n\pi\pm\theta$$

سوال: حل معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x+1=0$ را در انتروال $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ دریابید؟

حل سوال:

$$2\cos x+1=0\rightarrow2\cos x=-1/\div2\rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}$$

کوساین در ناحیه دوم منفی است و یک حل دارد.

$$x=180^\circ-60^\circ\rightarrow x=120^\circ$$

سوال: حل معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x+1=0$ را در انتروال $\left[0,2\pi\right]$ دریابید؟

حل سوال:

$$2\cos x+1=0\rightarrow2\cos x=-1/\div2\rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}$$

کوساین در ناحیه دوم و سوم منفی است.

$$x_1=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$
$$x_2=180^\circ+60^\circ=240^\circ$$

سوال: حل عمومی معادله مثلثاتی $2\cos x+1=0$ را دریابید؟

حل سوال:

$$2\cos x+1=0\rightarrow2\cos x=-1/\div2\rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}$$

کوساین در ناحیه دوم و سوم منفی است و کوچکترین زاویه که کوساین آن $-\frac{1}{2}$ است قرار ذیل است.

$$\theta=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$
$$\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$A=\left\{x/x=2n\pi+\theta\wedge x=2n\pi-\theta\right\}$$
$$A=\left\{x/x=2n\pi+\frac{2\pi}{3}\wedge x=2n\pi-\frac{\pi}{3}\right\}$$

یا

$$A=\left\{x/x=2n\pi\pm\theta\right\}$$
$$A=\left\{x/x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}\right\}$$

ویا

$$x=2n\pi\pm\theta$$
$$x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

سوال: حل عمومی معادله مثلثاتی $2\cos x-\sqrt{3}=0$ را دریابید؟

حل سوال:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0\rightarrow2\cos x=\sqrt{3}/\div2\rightarrow\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

کوساین در ناحیه اول و چهارم مثبت است و کوچکترین زاویه که کوساین آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است عبارت از $\theta=30^\circ$ یا $\theta=\frac{\pi}{6}$ میباشد.

$$x=2k\pi\pm\theta\rightarrow x=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

حالت سوم: اگر معادلهٔ مثلثاتی شکل $a\tan x+b=0$ را داشته باشد ویا به این شکل تبدیل شود، حل عمومی آن از رابطهٔ ذیل دریافت میشود.

$$A=\{x/x=k\pi+\theta \wedge (2k-1)\pi+\theta, k\in Z\}$$

یا

$$A=\{x/x=k\pi+\theta, k\in Z\}$$

ویا

$$x=k\pi+\theta$$

k یکعدد تام و θ کوچکترین زاویه است که معادله را صدق میکند.

سوال: حل معادلهٔ $\tan x-\sqrt{3}=0$ را در انتروال $[0,4\pi]$ دریابید؟

حل سوال:

$$\tan x-\sqrt{3}=0\to\tan x=\sqrt{3}$$

تانجانت در ناحیه اول و سوم مثبت میباشد.

$$x_1=\frac{\pi}{3}$$

$$x_2=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$$

$$x_3=2\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}$$

$$x_4=3\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{10\pi}{3}$$

سوال: حل معادلهٔ $\tan x+\sqrt{3}=0$ را در انتروال $[0,4\pi]$ دریابید؟

حل سوال:

$$\tan x+\sqrt{3}=0\to\tan x=-\sqrt{3}$$

تانجانت در ناحیه دوم و چهارم منفی میباشد.

$$x_1=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$x_2=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$$

$$x_3=3\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{8\pi}{3}$$

$$x_4=4\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{11\pi}{3}$$

سوال: حل عمومی معادلهٔ مثلثاتی $\tan x-\sqrt{3}=0$ را در یابید؟

حل سوال:

$$\tan x-\sqrt{3}=0\to\tan x=\sqrt{3}$$

تانجانت در ناحیه اول و سوم مثبت است و کوچکترین زاویه که معادله را صدق میکند قرار ذیل میباشد.

$$\theta=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

$$A=\{x/x=k\pi+\theta, k\in Z\}$$

$$A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in Z\right\}$$

یا

$$x=k\pi+\theta$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{3}$$

سوال: حل عمومی معادله مثلثاتی $tg2x-\sqrt{3}=0$ را دریابید؟

حل سوال:

$$tg2x-\sqrt{3}=0\to tg2x=\sqrt{3}$$

$$tg60^\circ=\sqrt{3}\to 2x=60^\circ/\div 2\to x=30^\circ$$

تانجانت در ناحیه اول و سوم مثبت است و کوچکترین زاویه که معادله را صدق میکند قرار ذیل است.

زاویه با ضریب آن θ در نظر گرفته میشود و حل عمومی را بالای ضریب زاویه تقسیم میکنیم.

$$\theta=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

$$A=\{x/x=k\pi+\theta \wedge (2k-1)\pi+\theta, k\in Z\}$$

$$A=\left\{x/x=\frac{k\pi+\theta}{2} \wedge \frac{(2k-1)\pi+\theta}{2}, k\in Z\right\}$$

$$A=\left\{x/x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{6}}{2} \wedge \frac{(2k-1)\pi+\frac{\pi}{3}}{} \quad k\in Z\right\}$$

$$A=\left\{x/x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12} \wedge \frac{(2k-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{12}, k\in Z\right\}$$

یا

$$A=\left\{x / x=k\pi+\theta \ , \ k\in Z\right\}$$

$$A=\left\{x / x=\frac{k\pi+\theta}{2} \ , \ k\in Z\right\}$$

$$A=\left\{x / x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{6}}{2} \ , \ k\in Z\right\}$$

$$A=\left\{x / x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12} \ , \ k\in Z\right\}$$

ویا

$$x=k\pi+\theta$$

$$x=\frac{k\pi+\theta}{2}$$

$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$$

حالت چهارم: اگر معادلهٔ مثلثاتی شکل $a\cot x+b=0$ را داشته باشد ویا به این شکل تبدیل شود، حل عمومی آن از رابطهٔ ذیل دریافت میشود.

$$A=\left\{x / x=k\pi+\theta \ \wedge \ (2k+1)\pi+\theta \ , \ k\in Z\right\}$$

یا

$$A=\left\{x / x=k\pi+\theta \ , \ k\in Z\right\}$$

ویا

$$x=k\pi+\theta$$

سوال: حل معادلهٔ $\cot x-\sqrt{3}=0$ را در انتروال $[0,2\pi]$ دریابید؟

حل سوال:

$$\cot x-\sqrt{3}=0\rightarrow \cot x=\sqrt{3}$$

کوتانجانت در ناحیه اول و سوم مثبت میباشد.

$$x_1=\frac{\pi}{6}$$

$$x_2=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{3}$$

سوال: حل معادلهٔ $\cot x+1=0$ را در انتروال $[0,4\pi]$ دریابید؟

حل سوال:

$$\cot x+1=0\rightarrow \cot x=-1$$

کوتانجانت در ناحیه دوم و چهارم منفی میباشد.

$$x_1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$x_2=2\pi+\frac{3\pi}{4}=\frac{11\pi}{4}$$

$$x_3=3\pi+\frac{3\pi}{4}=\frac{15\pi}{4}$$

$$x_4=4\pi+\frac{3\pi}{4}=\frac{19\pi}{4}$$

سوال: حل عمومی معادلهٔ مثلثاتی $\cot x-\sqrt{3}=0$ را در یابید؟

حل سوال:

$$\cot x-\sqrt{3}=0\rightarrow \cot x=\sqrt{3}$$

کوتانجانت در ناحیه اول و سوم مثبت است و کوچکترین زاویه که معادله را صدق میکند قرار ذیل میباشد.

$$\theta=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

$$A=\left\{x / x=n\pi+\theta \ \wedge \ (2n+1)\pi+\theta\right\}$$

$$A=\left\{x / x=n\pi+\frac{\pi}{6} \ \wedge \ (2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}\right\}$$

یا

$$A=\left\{x / x=k\pi+\theta \ , \ k\in Z\right\}$$

$$A=\left\{x / x=k\pi+\frac{\pi}{6} \ , \ k\in Z\right\}$$

ویا

$$x=k\pi+\theta$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{6}$$

سوال: معادلات مثلثاتی داده شده را برای کوچکترین قیمت ممکنهٔ آن حل کنید؟

حل معادلات درجه دوم مثلثاتی: برای حل معادلات درجه دوم مثلثاتی از تجزیه و معادله درجه دوم الجبری استفاده میکنیم.

$$ax^2+bx+c=0\rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a\sin^2 x+b\sin x+c=0\rightarrow \sin x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0\rightarrow \cos x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$a\tan^2 x+b\tan x+c=0\rightarrow \tan x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

سوال: حل معادله $\sin^2 x-7\sin x+6=0$ را دریابید؟

حل سوال:

$$\sin^2 x-7\sin x+6=0$$
$$(\sin x-6)(\sin x-1)=0$$

$$\sin x-6=0\rightarrow \sin x=6$$

عدد 6 از ساحه تحول ساین خارج است بناءً حل ندارد.

$$\sin x-1=0\rightarrow \sin x=1\rightarrow \sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$x=2k\pi+\theta\wedge x=(2k+1)\pi-\theta$$
$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\wedge x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}$$

سوال: حل معادله $\sin x+\cos 2x=0$ را دریابید؟

$$\sin x+\cos 2x=0\rightarrow \sin x+\left(1-2\sin^2 x\right)=0$$
$$-2\sin^2 x+\sin x+1=0$$
$$a=-2,\ b=1,\ c=1$$
$$\Delta=b^2-4ac\rightarrow \Delta=(1)^2-4(-2)(1)$$
$$\Delta=1+8\rightarrow \Delta=9$$

$$\sin x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\sin x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2(-2)}\rightarrow \sin x=\frac{-1\pm 3}{-4}$$

$$\sin x=\frac{-1+3}{-4}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$
$$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\rightarrow x=\frac{7\pi}{2}$$

$$\sin x=\frac{-1-3}{-4}=\frac{-4}{-4}=+1$$
$$\sin\frac{\pi}{2}=1\rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

$$x=2k\pi+\theta\wedge x=(2k+1)\pi-\theta$$
$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\wedge x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2}$$

سوال: حل معادله $4\tan x+\cot x-5=0$ را دریابید؟

حل سوال:

$$4\tan x+\cot x-5=0$$
$$4\tan x+\frac{1}{\tan x}-5=0/\cdot\tan x$$
$$4\tan^2 x+1-5\tan x=0$$
$$4\tan^2 x-5\tan x+1=0$$
$$a=4,\ b=-5,\ c=1$$
$$\Delta=b^2-4ac\rightarrow \Delta=(-5)^2-4(4)(1)$$
$$\Delta=+25-16\rightarrow \Delta=9$$

$$\tan x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\tan x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2(4)}\rightarrow \tan x=\frac{+5\pm 3}{8}$$

$$\tan x=\frac{+5+3}{8}=\frac{8}{8}=1$$
$$\tan\frac{\pi}{4}=1\rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$

$$x=k\pi+\theta\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

دریافت تعداد حل معادلهٔ مثلثاتی: درصورتیکه تعداد حل معادلهٔ مثلثاتی خواسته شده باشد و انتروال حل آن مشخص نشده باشد، معادله را ساده میسازیم و دو حالت ذیل وجود دارد.

اگر قیمت حاصل شده در ساحهٔ تحول شامل نباشد، معادله حل ندارد.

اگر قیمت حاصل شده در ساحهٔ تحول شامل باشد، معادله بینهایت حل دارد.

درصورتیکه ساحهٔ حل داده شده باشد تعداد حل را با استفاده از اشارهٔ نسبت های مثلثاتی تعیین میکنیم.

سوال: معادله مثلثاتی $2\cos x-1=0$ چند حل دارد؟

حل سوال:

$$2\cos x-1=0\rightarrow 2\cos x=1/\div 2\rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$$

چون عدد $\frac{1}{2}$ در ساحه تحول کوساین شامل است بناءً معادله بینهایت حل دارد.

سوال: معادله مثلثاتی $2\cos x - \sqrt{5} = 0$ چند حل دارد؟

حل سوال:

$$2\cos x - \sqrt{5} = 0 \to 2\cos x = 5 / \div 2$$
$$\to \cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

چون عدد $\frac{\sqrt{5}}{2}$ بزرگتر از 1 است و از ساحه تحول کوساین خارج است بناءً معادله هیچ حل ندارد.

سیستم معادلات دو مجهولهٔ مثلثاتی: سیستم معادلات مثلثاتی دارای حالات ذیل میباشد.

نوع اول: درین نوع، سیستم های ذیل شامل میباشند.

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

شرط حل سیستم های معادلات فوق قرار ذیل میباشد.

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

نوع دوم: درین نوع، سیستم های معادلات ذیل شامل میباشند.

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sin x \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cos x \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

شرط حل این سیستم قرار ذیل میباشد.

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2} \le a \le \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

نوع سوم: درین نوع، سیستم های معادلات ذیل شامل اند.

$$\begin{cases} tgx \pm tgy = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cot x \pm \cot y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

شرط حل این نوع سیستم ها قرار ذیل است.

$$a^2 - 4 + 4a\cot\alpha \ge 0$$

نوع چهارم: درین نوع، سیستم های معادلات ذیل شامل میباشند.

$$\begin{cases} tgxtgy = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} \cot x \cot y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

شرط حل این سیستم قرار ذیل میباشد.

$$-1 \le \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \le 1$$

نوع پنجم: درین نوع، سیستم های معادلات ذیل شامل میباشند.

$$\begin{cases} \frac{tgx}{tgy} = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{\cot x}{\cot y} = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

شرط حل این سیستم قرار ذیل میباشد.

$$-1 \le \frac{a-1}{a+1}\sin\alpha \le 1$$

سوال: در سیستم معادلات $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ قیمت هاي x و y را محاسبه کنید؟

حل سوال:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$1 = 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \to 1 = 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$1 = 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \to 1 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\frac{x\ \ y}{2}$$

$$1=\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2} / \div\sqrt{2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{x\quad y}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\frac{x-y}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4}=\frac{x-y}{2}$$

$$x-y=\frac{2\cdot\pi}{4} \rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+\cancel{y}=\frac{\pi}{2}.......I \\ x-\cancel{y}=\frac{\pi}{2}......II \end{array}\right| +$$

$$2x=\frac{2\pi}{2} \rightarrow 2x=\pi / \div 2 \rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

$$x+y=\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}+y=\frac{\pi}{2} \rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} \rightarrow y=0$$

سوال: در سیستم معادلات $\begin{cases} x+y=\pi \\ \sin x\cdot\sin y=1 \end{cases}$ قیمت هاي x و y را محاسبه کنید؟

حل سوال:

$$\begin{cases} x+y=\pi \\ \sin x\cdot\sin y=1 \end{cases}$$

$$\sin x\cdot\sin y=1 \rightarrow -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]=1$$

$$-\frac{1}{2}\left[\cos(\pi)-\cos(x-y)\right]=1 / \cdot(-2)$$

$$-1-\cos(x-y)=-2 / \cdot(-1)$$

$$1+\cos(x-y)=2 \rightarrow \cos(x-y)=2-1$$

$$\cos(x-y)=1 \rightarrow \cos 0=1$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y=0.......I \\ x+y=\pi......II \end{array}\right| +$$

$$2x=\pi / \div 2 \rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

$$x+y=\pi \rightarrow \frac{\pi}{2}+y=\pi$$

$$y=\pi-\frac{\pi}{2} \rightarrow y=\frac{\pi}{2}$$

سوال: در سیستم معادلات $\begin{cases} x+y=\frac{7\pi}{6} \\ \tan x\cdot\tan y=0 \end{cases}$ قیمت هاي x و y را محاسبه کنید؟

حل سوال:

$$\begin{cases} x+y=\frac{7\pi}{6} \\ \tan x\cdot\tan y=0 \end{cases}$$

$$\tan x\cdot\tan y=0 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\sin y}{\cos y}=0$$

$$\frac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{0}{1} \rightarrow \sin x\cdot\sin y=0$$

$$-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)-\cos(x-y)\right]=0 / \cdot(-2)$$

$$\cos\left(\frac{6\pi+\pi}{6}\right)-\cos(x-y)=0$$

$$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\cos(x-y)=0$$

$$-\cos\frac{\pi}{6}-\cos(x-y)=0 / \cdot(-1)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos(x-y)=0$$

$$\cos(x-y)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-y=\frac{5\pi}{6}..........I \\ x+y=\frac{7\pi}{6}........II \end{array}\right| +$$

$$2x=\frac{5\pi}{6}+\frac{7\pi}{6} \rightarrow 2x=\frac{12\pi}{6} \rightarrow x=2\pi$$

توابع مثلثاتی و گراف آنها: توابع مثلثاتي توابع پريوديك ويا دوره اي هستند يعني بعد از قيمت هاي مشخص كه دوره ويا پريود ناميده ميشود گراف مانند پريود قبلي دوباره تكرار ميشود. براي رسم گراف توابع مثلثاتي نسبت هاي مثلثاتي بالاي محور y و زوايا بالاي محور x در نظر گرفته ميشوند.

برای رسم گراف توابع مثلثاتی از نسبت های مثلثاتی زاویه های کوادرانتل استفاده میشود.

گراف تابع $y=\sin x$:

$y=\sin x$

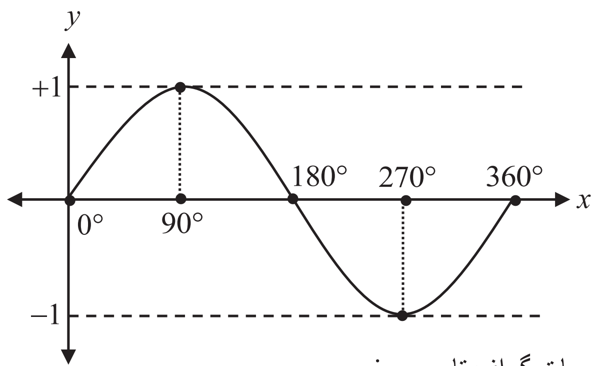
$x=0° \to y=\sin 0°=0$

$x=90° \to y=\sin 90°=+1$

$x=180° \to y=\sin 180°=0$

$x=270° \to y=\sin 270°=-1$

$x=360° \to y=\sin 360°=0$



مشخصات گراف تابع $y=\sin x$:

1) تابع $y=\sin x$ یک تابع متمادی است، بناءً گراف این تابع متصل یا پیوست است.
2) تابع $y=\sin x$ یک تابع پریودیک بوده که پریود آن انتروال $[0,2\pi]$ یا 2π میباشد. پریود به این مفهوم است که با افزایش هر 2π گراف تکرار میشود.
3) نقاط صفری ویا نقاط انعطاف آن $x=k\pi$ میباشد.
4) نقاط اعظمی آن $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ میباشد.
5) نقاط اصغری آن $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ میباشد.
6) دومین تابع $y=\sin x$ تمام اعداد حقیقی ویا انتروال $(-\infty,\infty)$ میباشد.
7) کودومین یا رنج تابع $y=\sin x$ انتروال $[-1,+1]$ میباشد.
8) دومین تمام توابع که شکل $y=\sin ax$ و $y=a\sin x$ را داشته باشند نیز تمام اعداد حقیقی ویا انتروال $(-\infty,\infty)$ میباشد.
9) کودومین تمام توابع که شکل $y=\sin ax$ را داشته باشد انتروال $[-1,+1]$ میباشد اما کودومین تمام توابع که شکل $y=a\sin x$ را داشته باشد انتروال $[+a,-a]$ میباشد.
10) گراف تابع $y=\sin x$ در انتروالهای $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ متزاید و در انتروالهای $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ و $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ متناقص میباشد.
11) تابع $y=\sin x$ یک تابع تاق میباشد.

گراف تابع $y=\cos x$:

$y=\cos x$

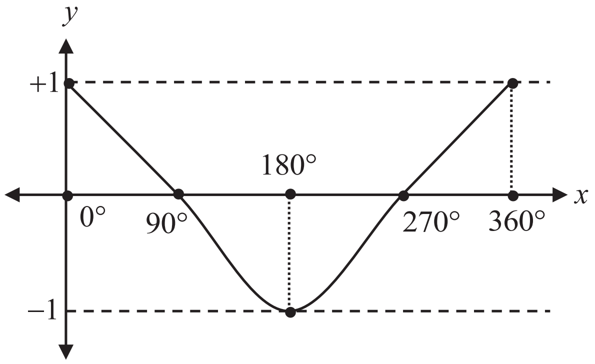
$x=0° \to y=\cos 0°=+1$

$x=90° \to y=\cos 90°=0$

$x=180° \to y=\cos 180°=-1$

$x=270° \to y=\cos 270°=0$

$x=360° \to y=\cos 360°=+1$



مشخصات گراف تابع $y=\cos x$:

1) تابع $y=\cos x$ یک تابع متمادی است، بناءً گراف این تابع متصل یا پیوست است.
2) تابع $y=\cos x$ یک تابع پریودیک بوده که پریود آن انتروال $[0,2\pi]$ یا 2π میباشد. پریود به این مفهوم است که با افزایش هر 2π گراف تکرار میشود.
3) تابع $y=\cos x$ در انتروال $(0,2\pi)$ نقطه اعظمی ندارد اما یک نقطه اصغری دارد.
4) تابع $y=\cos x$ در انتروال $[0,2\pi]$ دو نقطه اعظمی دارد و یک نقطه اصغری دارد.
5) نقاط صفری ویا نقاط انعطاف آن $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ میباشد.
6) نقاط اعظمی آن $x=2k\pi$ میباشد.

7) نقاط اصغری آن $x=\pi+2k\pi$ میباشد.
8) دومین تابع $y=\cos x$ تمام اعداد حقیقی ویا انتروال $(-\infty,\infty)$ میباشد.
9) کودومین یا رنج تابع $y=\cos x$ انتروال $[-1,+1]$ میباشد.
10) دومین تمام توابع که شکل $y=\cos ax$ و $y=a\cos x$ را داشته باشند نیز تمام اعداد حقیقی ویا انتروال $(-\infty,\infty)$ میباشد.
11) کودومین تمام توابع که شکل $y=\cos ax$ را داشته باشد انتروال $[-1,+1]$ میباشد اما کودومین تمام توابع که شکل $y=a\cos x$ را داشته باشد انتروال $[+a,-a]$ میباشد.
12) گراف تابع $y=\cos x$ در انتروالهای $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ متزاید و در انتروالهای $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ متناقص میباشد.
13) تابع $y=\cos x$ یک تابع جفت میباشد.

گراف تابع $y=\tan x$:

$$y=\tan x$$

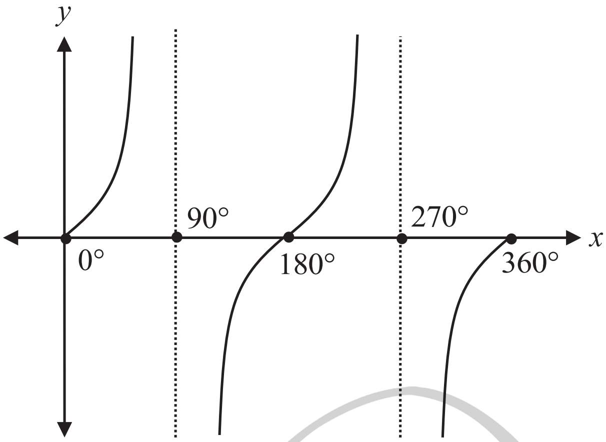
$$x=0°\rightarrow y=\tan 0°=\frac{\sin 0°}{\cos 0°}=\frac{0}{1}=0$$

$$x=90°\rightarrow y=\tan 90°=\frac{\sin 90°}{\cos 90°}=\frac{1}{0}=+\infty$$

$$x=180°\rightarrow y=\tan 180°=\frac{\sin 180°}{\cos 180°}=\frac{0}{-1}=0$$

$$x=270°\rightarrow y=\tan 270°=\frac{\sin 270°}{\cos 270°}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

$$x=360°\rightarrow y=\tan 360°=\frac{\sin 360°}{\cos 360°}=\frac{0}{1}=0$$



مشخصات گراف تابع $y=\tan x$:

1) تابع $y=\tan x$ یک تابع غیرمتمادی است بناءً گراف این تابع منفصل است.
2) تابع $y=\tan x$ یک تابع پریودیک بوده که پریود آن انتروال $[0,\pi]$ میباشد.
3) دومین تابع $y=\tan x$ تمام اعداد حقیقی به استثنای $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ بوده و کودومین آن تمام اعداد حقیقی ویا انتروال $(-\infty,\infty)$ می باشد.
4) تابع $y=\tan x$ در نقاط $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ غیرمتمادی میباشد بناءً درین نقاط تابع دارای مجانب های عمودی میباشد.
5) نقاط صفری ویا نقاط انعطاف آن $x=k\pi$ بوده، نقاط اعظمی و اصغری آن تعیین نشده نامعین اند ویا ندارد.
6) تابع $y=\tan x$ همیشه متزاید میباشد.
7) تابع $y=\tan x$ یک تابع تاق میباشد.

گراف تابع $y=\cot x$:

$$y=\cot x$$

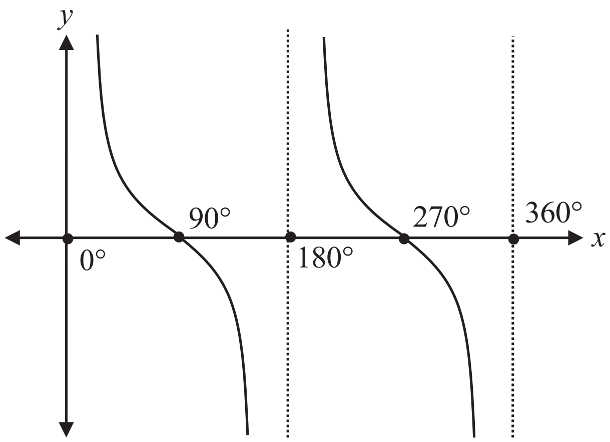
$$x=0°\rightarrow y=\cot 0°=\frac{\cos 0°}{\sin 0°}=\frac{1}{0}=+\infty$$

$$x=90°\rightarrow y=\cot 90°=\frac{\cos 90°}{\sin 90°}=\frac{0}{1}=0$$

$$x=180°\rightarrow y=\cot 180°=\frac{\cos 180°}{\sin 180°}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

$$x=270°\rightarrow y=\cot 270°=\frac{\cos 270°}{\sin 270°}=\frac{0}{-1}=0$$

$$x=360°\rightarrow y=\tan 360°=\frac{\cos 360°}{\sin 360°}=\frac{1}{0}=+\infty$$



مشخصات گراف تابع $y=\cot x$:

1) تابع $y=\cot x$ یک تابع غیرمتمادی است بناءً گراف این تابع منفصل است.

2) تابع $y=\cot x$ یک تابع پریودیک بوده که پریود آن انتروال $[0,\pi]$ میباشد.

3) دومین تابع $y=\cot x$ تمام اعداد حقیقی به استثنای $x=k\pi$ بوده و کودومین آن تمام اعداد حقیقی ویا انتروال $(-\infty,\infty)$ می باشد.

4) تابع $y=\cot x$ در نقاط $x=k\pi$ غیرمتمادی میباشد بناءً درین نقاط تابع دارای مجانب های عمودی میباشد.

5) نقاط صفری ویا نقاط انعطاف آن $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ بوده، نقاط اعظمی و اصغری آن تعیین نشده نامعین اند ویا ندارد.

6) تابع $y=\cot x$ همیشه متناقص میباشد.

7) تابع $y=\cot x$ یک تابع تاق میباشد.

گراف تابع $y=\sec x$:

$y=\sec x$

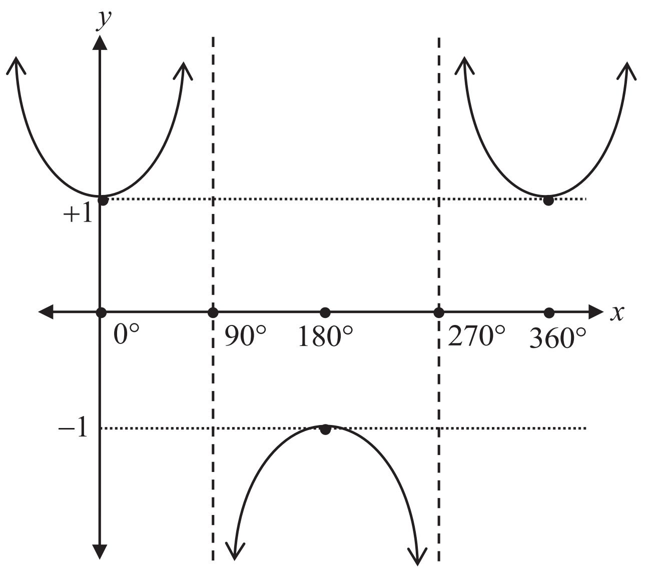
$$x=0° \rightarrow y=\sec 0°=\frac{1}{\cos 0°}=\frac{1}{1}=+1$$

$$x=90° \rightarrow y=\sec 90°=\frac{1}{\cos 90°}=\frac{1}{0}=+\infty$$

$$x=180° \rightarrow y=\sec 180°=\frac{1}{\cos 180°}=\frac{}{-1}=-1$$

$$x=270° \rightarrow y=\sec 270°=\frac{1}{\cos 270°}=\frac{}{0}=-\infty$$

$$x=360° \rightarrow y=\sec 360°=\frac{1}{\cos 360°}=\frac{}{1}=+1$$



مشخصات گراف تابع $y=\sec x$:

1) تابع $y=\sec x$ یک تابع غیر متمادی است، بناءً گراف این تابع منفصل است.

2) تابع $y=\sec x$ یک تابع پریودیک بوده که پریود آن انتروال $[0,\pi]$ یا π میباشد. پریود به این مفهوم است که با افزایش هر π گراف تکرار میشود.

3) تابع $y=\sec x$ در انتروال $(0,2\pi)$ یک نقطه اعظمی دارد اما نقطه اصغری ندارد.

4) تابع $y=\sec x$ در انتروال $[0,2\pi]$ یک نقطه اعظمی دارد و دو نقطه اصغری دارد.

5) نقاط صفری ویا نقاط انعطاف آن ندارد.

6) نقاط اعظمی آن $x=(2k+1)\pi$ میباشد.

7) نقاط اصغری آن $x=2k\pi$ میباشد.

8) دومین تابع $y=\sec x$ تمام اعداد حقیقی ویا انتروال $(-\infty,\infty)$ میباشد.

9) کودومین یا رنج تابع $y=\sec x$ انتروال ذیل میباشد.

$$(-\infty,-1]\cup[+1,\infty)$$

10) دومین تمام توابع که شکل $y=\sec ax$ و $y=a\sec x$ را داشته باشند نیز تمام اعداد حقیقی ویا انتروال $(\infty,\infty-)$ میباشد.

11) کودومین تمام توابع که شکل $y=\sec ax$ را داشته باشد انتروال $(-\infty,-1]\cup[+1,\infty)$ میباشد اما کودومین تمام توابع که شکل $y=a\sec x$ را داشته باشد انتروال $(-\infty,-a]\cup[+a,\infty)$ میباشد.

12) گراف تابع $y=\sec x$ در انتروال $(0,\pi)$ متزاید و در انتروال $(\pi,2\pi)$ متناقص میباشد.

13) تابع $y=\sec x$ یک تابع جفت میباشد.

گراف تابع $y=\csc x$:

$y=\csc x$

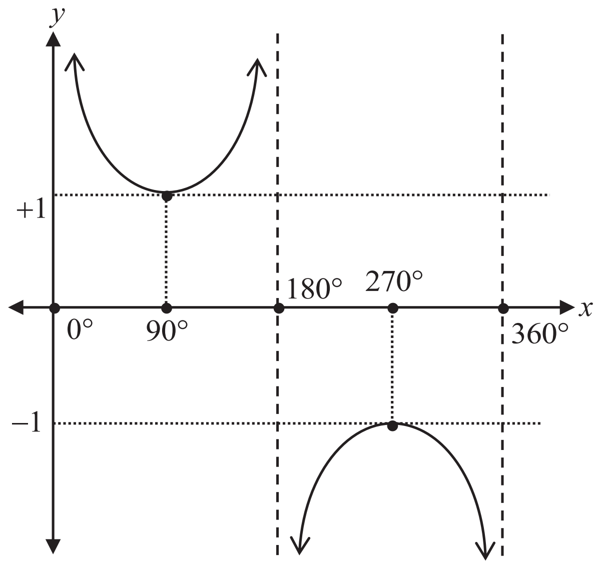
$$x=0° \rightarrow y=\csc 0°=\frac{1}{\sin 0°}=\frac{1}{0}=+\infty$$

$$x=90° \rightarrow y=\csc 90°=\frac{1}{\sin 90°}=\frac{1}{1}=+1$$

$$x=180° \rightarrow y=\csc 180°=\frac{1}{\sin 180°}=\frac{1}{0}=-\infty$$

$$x=270° \rightarrow y=\csc 270°=\frac{1}{\sin 270°}=\frac{}{-1}=-1$$

$$x=360° \rightarrow y=\csc 360°=\frac{1}{\sin 360°}=\frac{}{0}=+\infty$$



مشخصات گراف تابع $y=\csc x$:

1) تابع $y=\csc x$ یک تابع غیر متمادی است، بناءً گراف این تابع منفصل است.
2) تابع $y=\csc x$ یک تابع پریودیک بوده که پریود آن انتروال $[0,\pi]$ یا π میباشد. پریود به این مفهوم است که با افزایش هر π گراف تکرار میشود.
3) تابع $y=\csc x$ در انتروال $(0,2\pi)$ یا $[0,2\pi]$ یک نقطه اصغری دارد و یک نقطه اعظمی ندارد.
4) نقاط صفری ویا نقاط انعطاف آن ندارد.
5) نقاط اصغری آن $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ میباشد.
6) نقاط اعظمی آن $x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ میباشد.
7) دومین تابع $y=\csc x$ تمام اعداد حقیقی ویا انتروال $(-\infty,\infty)$ میباشد.
8) کودومین یا رنج تابع $y=\csc x$ انتروال ذیل میباشد.
$$(-\infty,-1]\cup[+1,\infty)$$
9) دومین تمام توابع که شکل $y=\csc ax$ و $y=a\csc x$ را داشته باشند نیز تمام اعداد حقیقی ویا انتروال $(-\infty,\infty)$ میباشد.
10) کودومین تمام توابع که شکل $y=\csc ax$ را داشته باشد انتروال $(-\infty,-1]\cup[+1,\infty)$ میباشد اما کودومین تمام توابع که شکل $y=a\csc x$ را داشته باشد انتروال $(-\infty,-a]\cup[+a,\infty)$ میباشد.
11) گراف تابع $y=\csc x$ در انتروالهای ذیل متناقص میباشد.
$$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$$
12) گراف تابع $y=\csc x$ در انتروال ذیل متزاید میباشد.
$$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$$
13) تابع $y=\sec x$ یک تابع تاق میباشد.

سوال: دومین تابع $y=2\sin 3x+4$ عبارت است از:

حل سوال: $D_y=(-\infty,\infty)$

سوال: ناحیه قیمت تابع $y=5\sin 3x$ عبارت است از:

حل سوال: $C_y=[-5,5]$

سوال: ناحیه قیمت تابع $y=\sin 2x$ عبارت است از:

حل سوال: $C_y=[-1,+1]$

سوال: ناحیه قیمت تابع $y=\sin 2x+3$ عبارت است از:

حل سوال:
$$C_y=[-1+3,+1+3]$$
$$C_y=[+2,4]$$

سوال: ناحیه قیمت تابع $y=5\sin 2x+3$ عبارت است از:

حل سوال:
$$C_y=[-5+3,+5+3]$$
$$C_y=[-2,+8]$$

سوال: پریود تابع $y=\sin x$ عبارت است از:

حل سوال: $[0,2\pi]$ یا 2π

سوال: پریود تابع $y=\sin 2x$ عبارت است از:

حل سوال: اگر زاویه ضریب داشته باشد پریود تابع را بالای ضریب زاویه تقسیم میکنیم.
$$\frac{[0,2\pi]}{2}=[0,\pi] \text{ یا } \pi$$

سوال: پریود تابع $y=\sin 3x$ عبارت است از:

حل سوال: $\dfrac{[0,2\pi]}{3}=\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ یا $\dfrac{2\pi}{3}$

توابع معکوس مثلثاتی: بصورت عموم توابع معکوس مثلثاتی طور ذیل ارایه مشوند.

$$y=\sin x \to \arcsin y = x$$
$$y=\cos x \to \arccos y = x$$
$$y=\tan x \to \arctan y = x$$
$$y=\cot x \to \operatorname{arc}\cot y = x$$
$$y=\sec x \to \operatorname{arc}\sec y = x$$
$$y=\csc x \to \operatorname{arc}\csc y = x$$

توابع معکوس مثلثاتی طور ذیل نیز ارایه مشوند.

$$y=\sin x \to \sin^{-1} y = x$$
$$y=\cos x \to \cos^{-1} y = x$$
$$y=\tan x \to \tan^{-1} y = x$$
$$y=\cot x \to \cot^{-1} y = x$$
$$y=\sec x \to \sec^{-1} y = x$$
$$y=\csc x \to \csc^{-1} y = x$$

سوال: تمام روابط مثلثاتی زاویه $30°$ را با معکوس آن بنویسید:

حل سوال:

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \to \arcsin\frac{1}{2} = 30°$$
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30°$$
$$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \to \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} = 30°$$
$$\cot 30° = \sqrt{3} \to \operatorname{arc}\cot\sqrt{3} = 30°$$
$$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3} \to \operatorname{arc}\sec\frac{2\sqrt{3}}{3} = 30°$$
$$\csc 30° = 2 \to \operatorname{arc}\csc 2 = 30°$$

سوال: تمام روابط مثلثاتی زاویه $45°$ را با معکوس آن بنویسید:

حل سوال:

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$
$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} = 45°$$
$$\tan 45° = 1 \to \tan^{-1} 1 = 45°$$
$$\cot 45° = 1 \to \cot^{-1} 1 = 45°$$
$$\sec 45° = \sqrt{2} \to \sec^{-1}\sqrt{2} = 45°$$
$$\csc 45° = \sqrt{2} \to \csc^{-1}\sqrt{2} = 45°$$

روابط مهم توابع معکوس مثلثاتی:

بخش اول:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$
$$\arctan x + \operatorname{arc}\cot x = \frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{arc}\sec x + \operatorname{arc}\csc x = \frac{\pi}{2}$$

بخش دوم:

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$
$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$$
$$\operatorname{arc} tg(\cot x) = \frac{\pi}{2} - x$$
$$\operatorname{arc} cot(\mathrm{t}\, gx) = \frac{\pi}{2} - x$$
$$\operatorname{arc}\sec(\csc x) = \frac{\pi}{2} - x$$
$$\operatorname{arc}\csc(\sec x) = \frac{\pi}{2} - x$$

بخش سوم:

$$\arcsin(\sin x) = x$$
$$\sin(arc\sin x) = x$$
$$\arccos(\cos x) = x$$
$$\cos(arc\cos x) = x$$
$$\operatorname{arc} tg(tgx) = x$$
$$tg(arctgx) = x$$
$$\operatorname{arc} cot(cotx) = x$$
$$cot(arccotx) = x$$
$$\operatorname{arc}\sec(\sec x) = x$$
$$\sec(arc\sec x) = x$$
$$\operatorname{arc}\csc(\csc x) = x$$
$$\csc(arc\csc x) = x$$