

هندسه تحلیلی

تهیه و ترتیب: انجنیر محمد امین محمدی

این چپتر برای دانش آموزان مکاتب آماده
شده است.

فصل اول: نقطه و خط

تعریف هندسه تحلیلی: هندسه تحلیلی عبارت از علمیت که از روابط بین اشکال هندسی و معادلات الجبری بحث میکند و یا هندسه تحلیلی علم ارتباط بین الجبر و هندسه میباشد که برای هر شکل هندسی یک معادله الجبری و برای هر معادله الجبری یک شکل هندسی را بیان میکند.

اساس هندسه تحلیلی توسط رین دکارتس یا دیکارت فرانسوی گذاشته شد.

دکارتس یک رساله بنام La Geometry تحریر کرد و در آن از میتود های الجبری برای حل مسایل هندسه استفاده کرد.

هندسه تحلیلی بنام هندسه هم آهنگ نیز یاد میشود.

در هندسه تحلیلی اشکال هندسی در سیستم کمیات وضعیه مستوی مطالعه میشوند این سیستم متشکل از دو محور میباشد.

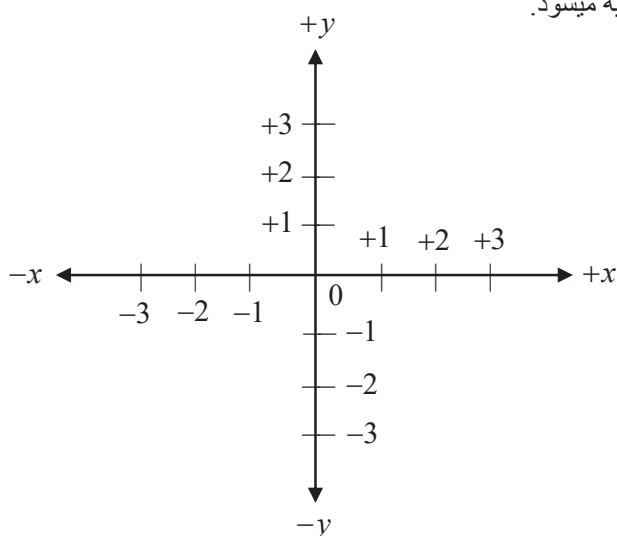
دو خط عمود بر هم بنام محورهای کواردنیت یاد میشوند.

محور افقی در سیستم کمیات وضعیه بنام محور x یا محور طول و یا محور فاصله یا (Abscissa) گفته میشود.

محور عمودی بنام محور y یا محور عرض و یا محور ترتیب یا (Ordinate) گفته میشود.

سیستم کمیات وضعیه مستوی بنام های سیستم کارتیزین (Cartesian) و سیستم کمیات وضعیه مستطیلی نیز یاد میشود.

در سیستم کمیات وضعیه هر نقطه به شکل جوره مرتب (x, y) ارایه میشود.



اشاره نقاط در سیستم کمیات وضعیه: اشاره نقاط در چهار ناحیه سیستم کمیات وضعیه قرار ذیل میباشد.

در ناحیه اول قیمت های x و y هر دو مثبت اند.

$$I \Rightarrow (x, y) = (+, +)$$

در ناحیه دوم قیمت های x منفی و قیمت های y مثبت اند.

$$II \Rightarrow (x, y) = (-, +)$$

در ناحیه سوم قیمت های x و y هر دو منفی اند.

$$III \Rightarrow (x, y) = (-, -)$$

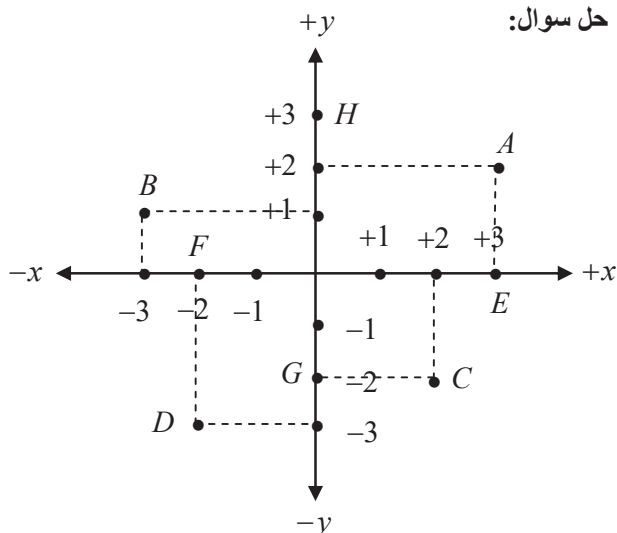
در ناحیه چهارم قیمت های x مثبت و قیمت های y منفی اند.

$$IV \Rightarrow (x, y) = (+, -)$$

سوال 1: نقاط ذیل را روی سیستم کمیات وضعیه تعیین کنید.

$$\{A(3, 2), B(-3, 1), C(2, -2), D(-2, -3), E(3, 0), F(-2, 0), G(0, -2), H(0, 3)\}$$

حل سوال:



یادداشت:

الف: اگر نقطه بالای محور x باشد قسمت y آن مساوی به صفر میباشد. $(x, 0)$

ب: اگر نقطه بالای محور y باشد قسمت x آن مساوی به صفر میباشد. $(0, y)$

ج: اگر نقطه بالای مبدا کمیات وضعیه قرار داشته باشد قسمت x و قسمت y آن هر دو مساوی به صفر میباشد. $(0, 0)$

سوال 2: نقطه $(m+3, -m+1)$ بالای محور x قرار دارد، قیمت m را دریافته و قیمت عددی نقطه را دریابید؟

حل سوال: چون نقطه بالای محور x قرار دارد باید قیمت y نقطه صفر باشد.

$$-m+1=0 \rightarrow -m=-1 \div (-1) \rightarrow m=1$$

حالا قیمت m را بجای آن وضع نموده نقطه حاصل میشود.

$$(m+3, -m+1) = (1+3, -1+1)$$

$$(m+3, -m+1) = (4, 0)$$

سوال 3: نقطه $(2n+6, 5n-1)$ بالای محور y قرار دارد، قیمت n را دریافته و قیمت عددی نقطه را دریابید؟

حل سوال: چون نقطه بالای محور y قرار دارد باید قیمت x نقطه صفر باشد.

هندسه تحلیلی

سوال ۵: فاصله بین نقطه $(4, 2)$ و مبدا کمیات وضعیه را

دریابید؟

حل سوال:

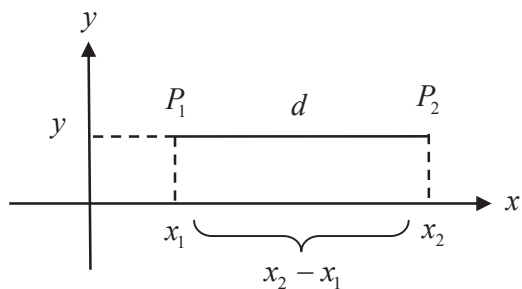
$$x = 4, y = 2, d = ?$$

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow d = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}$$

$$\rightarrow d = \sqrt{16 + 4} \rightarrow d = \sqrt{20}$$

$$\rightarrow d = \sqrt{4 \cdot 5} \rightarrow d = 2\sqrt{5}$$

دریافت فاصله بین دو نقطه روی خط افقی: در صورتیکه در دو نقطه مولفه های y باهم مساوی باشند نقاط روی خط افقی قرار دارند و فاصله بین آنها از رابطه ذیل دریافت میشود.



$$P_1(x_1, y), P_2(x_2, y)$$

$$P_1P_2 = |x_2 - x_1|$$

$$P_1P_2 = |\Delta x|$$

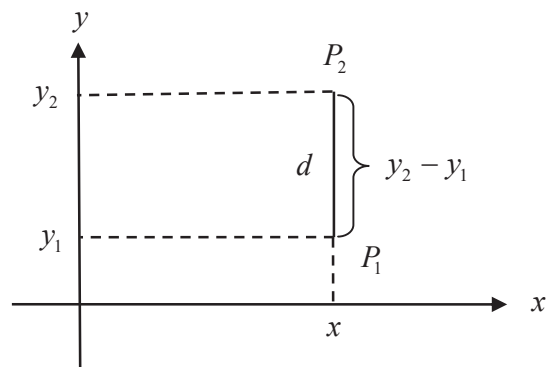
سوال ۶: فاصله بین نقاط $A(7, 4)$ و $B(-2, 4)$ را دریابید؟

حل سوال:

$$AB = |x_2 - x_1| \rightarrow AB = |(-2) - (7)|$$

$$AB = |-2 - 7| \rightarrow AB = |-9| \rightarrow AB = 9$$

دریافت فاصله بین دو نقطه روی خط عمودی: در صورتیکه در دو نقطه مولفه های x باهم مساوی باشند نقاط روی خط عمودی قرار دارند و فاصله بین آنها از رابطه ذیل دریافت میشود.



$$P_1(x, y_1), P_2(x, y_2)$$

$$P_1P_2 = |y_2 - y_1|$$

$$P_1P_2 = |\Delta y|$$

$$2n + 6 = 0 \rightarrow 2n = -6 / \div 2 \rightarrow n = -3$$

حالا قیمت n را بجای آن وضع نموده نقطه حاصل میشود.

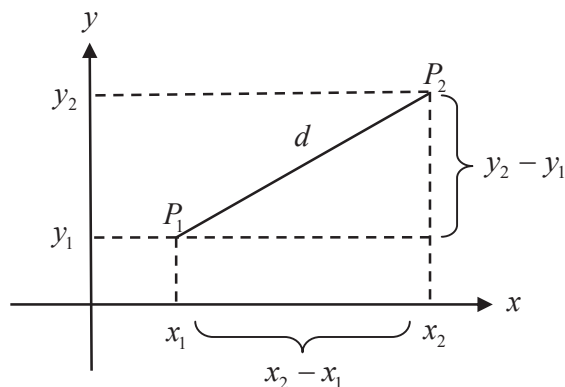
$$(2n + 6, 5n - 1) = (2(-3) + 6, 5(-3) - 1)$$

$$(2n + 6, 5n - 1) = (-6 + 6, -15 - 1)$$

$$(2n + 6, 5n - 1) = (0, -16)$$

دریافت فاصله بین دو نقطه:

اگر دو نقطه $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ را در نظر بگیریم فاصله بین این دو نقطه طور ذیل دریافت میشود.



$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Delta x = (x_2) - (x_1), \Delta y = (y_2) - (y_1)$$

$$P_1P_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

از رابطه فوق برای دریافت طول قطعه خط، طول شعاع دایره، طول های اضلاع مثلث، مربع و مستطیل نیز استفاده می شود.

سوال ۴: فاصله بین نقاط $A(3, -2)$ و $B(-1, -5)$ را

دریابید؟

حل سوال:

$$x_1 = 3, x_2 = -1$$

$$\Delta x = (x_2) - (x_1)$$

$$\Delta x = (-1) - (3) \rightarrow \Delta x = -1 - 3 \rightarrow \Delta x = -4$$

$$y_1 = -2, y_2 = -5$$

$$\Delta y = (y_2) - (y_1)$$

$$\Delta y = (-2) - (-5) \rightarrow \Delta y = -2 + 5 \rightarrow \Delta y = 3$$

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow AB = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$$

$$AB = \sqrt{16 + 9} \rightarrow AB = \sqrt{25} \rightarrow AB = 5$$

در صورتیکه فاصله یک نقطه الی مبدا کمیات وضعیه خواسته شده باشد، از رابطه ذیل استفاده می شود.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$B(7,1), C(7,8), BC = ?$$

$$x_1 = 7, x_2 = 7$$

$$\Delta x = (x_2) - (x_1)$$

$$\Delta x = (7) - (7) \rightarrow \Delta x = 7 - 7 \rightarrow \Delta x = 0$$

$$y_1 = 1, y_2 = 8$$

$$\Delta y = (y_2) - (y_1)$$

$$\Delta y = (8) - (1) \rightarrow \Delta y = 8 - 1 \rightarrow \Delta y = 7$$

$$BC = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow BC = \sqrt{(0)^2 + (7)^2}$$

$$BC = \sqrt{0 + 49} \rightarrow BC = \sqrt{49} \rightarrow BC = 7$$

$$AB = 5, AC = \sqrt{74}, BC = 7$$

$$a = \sqrt{74}, b = 5, c = 7$$

$$a = \sqrt{74} \rightarrow a^2 = 74$$

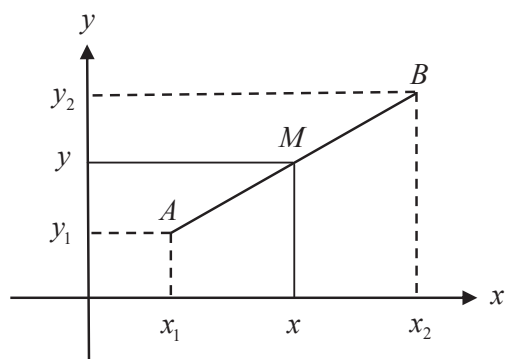
$$b^2 + c^2 = (5)^2 + (7)^2$$

$$\rightarrow b^2 + c^2 = 25 + 49 \rightarrow b^2 + c^2 = 74$$

چون $a^2 = b^2 + c^2$ است در نتیجه مثلث قائم الزاویه میباشد.

دریافت نقطه تنصیف یک قطعه خط: اگر نقطه $P(x, y)$ قطعه

خط را نصف کند نقطه تنصیف آن از روابط ذیل دریافت می شود.



$$M(x, y) \rightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

سوال ۹: نقاط انجام های یک قطعه خط $A(5, -3)$ و

$B(-3, -1)$ میباشند. مختصات نقطه تنصیف آنرا دریابید؟

حل سوال:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x = \frac{(5) + (-3)}{2} = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y = \frac{(-3) + (-1)}{2} = \frac{-3 - 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

سوال ۷: فاصله بین تقاط $M(3, -4)$ و $N(3, 6)$ را دریابید؟

حل سوال:

$$MN = |y_2 - y_1|$$

$$\rightarrow MN = |(6) - (-4)| \rightarrow MN = |6 + 4|$$

$$\rightarrow MN = |10| \rightarrow MN = 10$$

تعیین نوعیت مثلث: در صورتیکه رأس های مثلث داده شده باشد و

طول اضلاع مثلث را به a ، b و c نشان دهیم در ابتدا طول

های سه ضلع مثلث را دریافت میکنیم و سه حالت ذیل وجود دارد.

الف: اگر $a^2 = b^2 + c^2$ باشد مثلث قائم الزاویه است.

ب: اگر $a^2 < b^2 + c^2$ باشد مثلث حادالزاویه است.

ج: اگر $a^2 > b^2 + c^2$ باشد مثلث منفرج الزاویه است.

در سه رابطه فوق a ضلع بزرگ میباشد.

سوال ۸: رأس های یک مثلث در نقاط $A(2, 1)$ ، $B(7, 1)$ و

$C(7, 8)$ قرار دارند طول اضلاع مثلث را دریافته و نوعیت

مثلث را تعیین کنید؟

حل سوال:

$$A(2, 1), B(7, 1), AB = ?$$

$$x_1 = 2, x_2 = 7$$

$$\Delta x = (x_2) - (x_1)$$

$$\Delta x = (7) - (2) \rightarrow \Delta x = 7 - 2 \rightarrow \Delta x = 5$$

$$y_1 = 1, y_2 = 1$$

$$\Delta y = (y_2) - (y_1)$$

$$\Delta y = (1) - (1) \rightarrow \Delta y = 1 - 1 \rightarrow \Delta y = 0$$

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow AB = \sqrt{(5)^2 + (0)^2}$$

$$AB = \sqrt{25 + 0} \rightarrow AB = \sqrt{25} \rightarrow AB = 5$$

$$A(2, 1), C(7, 8), AC = ?$$

$$x_1 = 2, x_2 = 7$$

$$\Delta x = (x_2) - (x_1)$$

$$\Delta x = (7) - (2) \rightarrow \Delta x = 7 - 2 \rightarrow \Delta x = 5$$

$$y_1 = 1, y_2 = 8$$

$$\Delta y = (y_2) - (y_1)$$

$$\Delta y = (8) - (1) \rightarrow \Delta y = 8 - 1 \rightarrow \Delta y = 7$$

$$AC = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow AC = \sqrt{(5)^2 + (7)^2}$$

$$AC = \sqrt{25 + 49} \rightarrow AC = \sqrt{74}$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$

$$x = \frac{(1) + \left(\frac{2}{3}\right)(\cancel{3}^2)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1+4}{\frac{5}{3}} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = \frac{\cancel{3} \cdot 3}{1 \cdot \cancel{3}} = 3$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

$$y = \frac{(7) + \left(\frac{2}{3}\right)(-\cancel{3})}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{7-2}{\frac{5}{3}} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = \frac{\cancel{3} \cdot 3}{1 \cdot \cancel{3}} = 3$$

$$\Rightarrow P(x, y) \rightarrow P(3, 3)$$

سوال ۱۲: کمیات وضعیه نقطه P را دریابید اگر یک قطعه خطی با انجام های $P_1(-8, 4)$ و $P_2(2, -1)$ را خارجاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم کند؟

حل سوال:

$$x_1 = -8, x_2 = 2, y_1 = 4, y_2 = -1, r = -\frac{2}{3}, P(x, y) = ?$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$

$$x = \frac{(-8) + \left(-\frac{2}{3}\right)(2)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-8 - \frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{28}{3}}{\frac{1}{3}} = -\frac{28 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 1} = -28$$

$$x = -28$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

$$y = \frac{(4) + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{4 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{14 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot 1} = 14$$

$$\Rightarrow P(x, y) \rightarrow P(-28, 14)$$

زاویه میل و میل یک خط مستقیم: زاویه میل یک خط مستقیم عبارت از زاویه است که خط مستقیم با جهت مثبت محور x تشکیل میکند.

قرار شکل زاویه های $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ زاویه های میل هستند.

$$\Rightarrow M(1, -2)$$

سوال ۱۰: انجام های یک قطر یک دایره نقاط $P_1(4, 6)$ و $P_2(-6, 5)$ میباشند. مختصات مرکز دایره را دریابید؟
حل سوال: نقطه تنصیف مرکز دایره میباشد.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

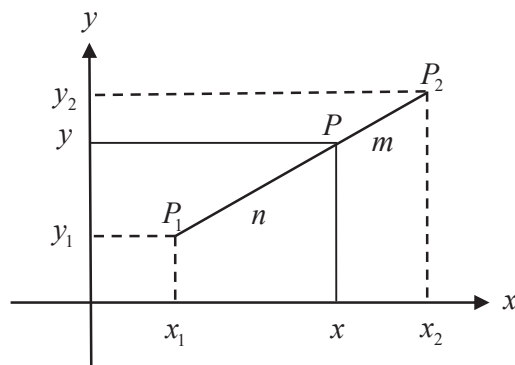
$$x = \frac{(4) + (-6)}{2} = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y = \frac{(6) + (5)}{2} = \frac{6+5}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$\Rightarrow C\left(-1, \frac{11}{2}\right) \rightarrow C(-1, 5.5)$$

تقسیم یک قطعه خط به یک نسبت: اگر انجام های یک قطعه خط نقاط $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ باشند و نقطه ای باشد که قطعه خط را به نسبت r تقسیم کند، کمیات وضعیه نقطه $P(x, y)$ از روابط ذیل دریافت میشود.



$$r = \frac{m}{n}, \quad P(x, y)$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

یادداشت: در صورتیکه قطعه خط توسط یک نقطه داخلی تقسیم شده باشد، نسبت r اشاره مثبت و اگر خارجاً تقسیم شده باشد، نسبت r اشاره منفی دارد.

سوال ۱۱: نقطه $P(x, y)$ یک قطعه خط را که انجام های آن نقاط $P_1(1, 7)$ و $P_2(6, -3)$ میباشد داخلی به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم

میکند. مختصات نقطه $P(x, y)$ را دریابید؟

حل سوال:

$$x_1 = 1, x_2 = 6, y_1 = 7, y_2 = -3, r = +\frac{2}{3}, P(x, y) = ?$$

هندسه تحلیلی

سوال ۱۶: میل خط مستقیمی را دریابید که از نقاط $A(-1,5)$ و

$B(4,1)$ عبور می کند؟

حل سوال:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{(1) - (5)}{(4) - (-1)} = \frac{1-5}{4+1} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

یادداشت: اگر سه نقطه بالای یک خط واقع باشند، میل های آنها دو بدو باهم مساوی می باشند.

سوال ۱۷: نشان دهید که سه نقطه $A(-3,6)$ ، $B(3,2)$ و

$C(6,0)$ بالای یک خط مستقیم واقع اند؟

حل سوال:

$$m_{AB} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{(2) - (6)}{(3) - (-3)} = \frac{2-6}{3+3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$m_{AC} \rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{(0) - (6)}{(6) - (-3)} = \frac{0-6}{6+3} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

چون میل ها مساوی حاصل شدند بناءً هر سه نقطه بالای یک خط قرار دارند.

3- اگر معادله خط مستقیم داده شده باشد معادله را به شکل

$y = mx + b$ تبدیل می کنیم. ضریب x میل خط مستقیم

میباشد.

سوال ۱۸: معادله یک خط مستقیم $3x + 3y - 12 = 0$ میباشد،

میل خط مستقیم را دریابید؟

حل سوال:

$$3x + 3y - 12 = 0$$

$$\rightarrow 3y = -3x + 12 / \div 3$$

$$\rightarrow y = -x + 4$$

$$\Rightarrow m = -1$$

سوال ۱۹: معادله یک خط مستقیم $x + 2y + 10 = 0$ میباشد،

میل خط مستقیم را دریابید؟

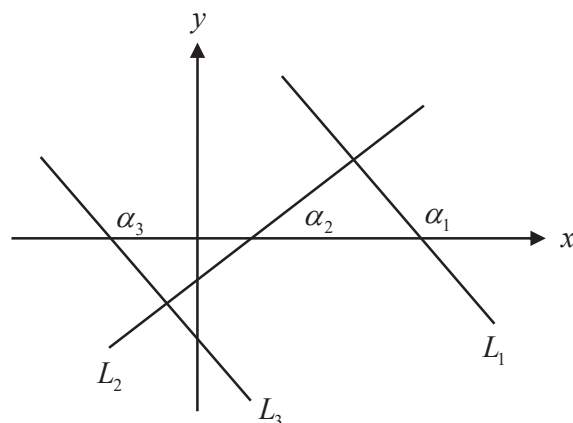
حل سوال:

$$x + 2y + 10 = 0$$

$$\rightarrow 2y = -x - 10 / \div 2$$

$$\rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 5$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$



تانجانت زاویه میل، میل خط مستقیم نامیده می شود.

اگر زاویه میل را α و میل خط مستقیم را m بنامیم میتوانیم

بنویسیم که: $m = tg\alpha$

اگر زاویه میل حاده باشد میل اشاره مثبت دارد.

اگر زاویه میل منفرجه باشد میل اشاره منفی دارد.

اگر یک خط مستقیم با محور x موازی باشد زاویه میل آن صفر بوده و میل آن نیز صفر میباشد.

اگر یک خط مستقیم بالای محور x عمود باشد زاویه میل 90° بوده و میل معین ندارد یا میل آن تعریف نشده است و یا لایتنای است.

دریافت میل خط مستقیم:

1- اگر زاویه میل خط مستقیم داده شده باشد تانجانت آنرا دریافت

میکنیم. میل خط مستقیم تانجانت زاویه میل است.

سوال ۱۳: یک خط مستقیم با محور x زاویه 45° را میسازد میل خط مستقیم را دریابید؟

حل سوال:

$$m = tg\alpha \rightarrow m = tg45^\circ \rightarrow m = 1$$

سوال ۱۴: یک خط مستقیم با محور x زاویه 135° را میسازد میل خط مستقیم را دریابید؟

حل سوال:

$$m = tg\alpha \rightarrow m = tg135^\circ \rightarrow m = -1$$

2- اگر دو نقطه خط مستقیم داده شده باشد میل خط مستقیم از

رابطه $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ دریافت می شود.

سوال ۱۵: میل خط مستقیمی را دریابید که از نقاط $A(2,4)$ و

$B(6,10)$ عبور میکند؟

حل سوال:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{(10) - (4)}{(6) - (2)} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

ثبوت:

در هر مثلث زاویه خارجی مساوی به مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن میباشد.

$$\alpha_2 = \theta + \alpha_1$$

$$\theta + \alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \theta = \alpha_2 - \alpha_1 / \text{tg}$$

$$\text{tg}\theta = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\text{tg}\theta = \frac{\text{tg}\alpha_2 - \text{tg}\alpha_1}{1 + \text{tg}\alpha_2 \cdot \text{tg}\alpha_1}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$$

سوال ۲۰: خط مستقیمی که از نقاط $(2, 5)$ و $(-6, -11)$ می

گذرد با خط مستقیمی که از نقاط $(-4, -6)$ و $(3, 8)$ عبور

میکند در کدام حالت ذیل قرار دارد؟

- (1) موازی
(2) متعامد
(3) متقاطع
(4) متناظر

حل سوال:

$$(2, 5), (-6, -11), m_1 = ?$$

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(-11) - (5)}{(-6) - (2)} = \frac{-11 - 5}{-6 - 2} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$(-4, -6), (3, 8), m_2 = ?$$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(8) - (-6)}{(3) - (-4)} = \frac{8 + 6}{3 + 4} = \frac{14}{7} = 2$$

چون میل ها باهم مساوی اند بنیاء خطوط موازی اند.

سوال ۲۱: خط مستقیمی که از نقاط $(7, 5)$ و $(1, 1)$ می گذرد

باخط مستقیمی که از نقاط $(4, -3)$ و $(2, 0)$ عبور میکند در

کدام حالت ذیل قرار دارد؟

حل سوال:

$$(7, 5), (1, 1), m_1 = ?$$

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(1) - (5)}{(1) - (7)} = \frac{1 - 5}{1 - 7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$(4, -3), (2, 0), m_2 = ?$$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(0) - (-3)}{(2) - (4)} = \frac{0 + 3}{2 - 4} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{2}{3}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)$$

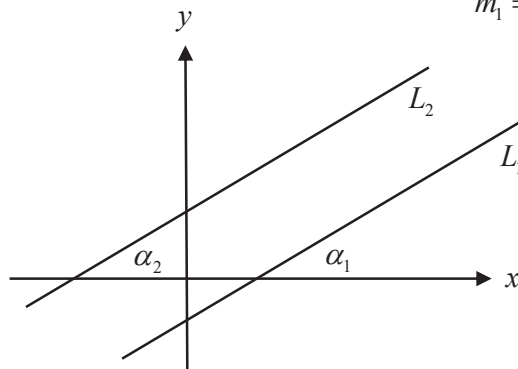
$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

چون $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ است یا $m_1 \cdot m_2 = -1$ است بنیاء خطوط باهم عمود اند.

رابطه بین دو خط موازی: دوخط موازی با محور x زاویه های مساوی را تشکیل میدهند بنیاء تانجانت زاویه ها نیز باهم مساوی و در نتیجه میل خطوط موازی باهم مساوی میباشد.

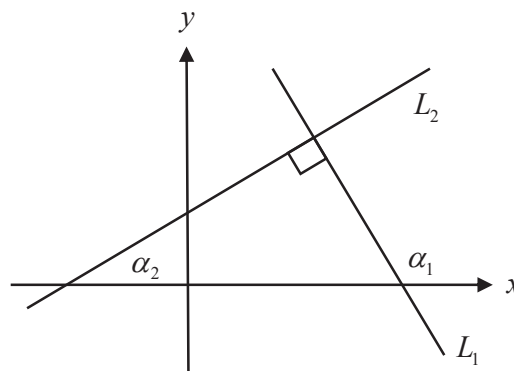
اگر میل های دوخط موازی m_1 و m_2 باشند میتوانیم بنویسیم که:

$$m_1 = m_2$$



رابطه بین میل های دو خط متعامد: اگر دو خط بالای هم عمود باشند وبا محور x زاویه های میل α_1 و α_2 را تشکیل کرده

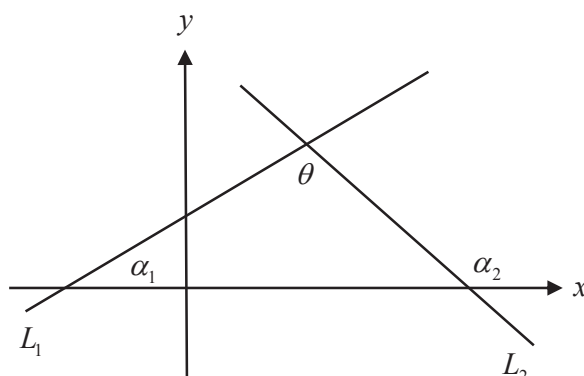
باشند بین میل های آنها رابطه $m_1 \cdot m_2 = -1$ وجود دارد.



رابطه بین میل های دو خط متقاطع: اگر دو خط باهم متقاطع باشند و باهم یک زاویه حاده مانند تیتا θ را تشکیل کرده باشند

بین میل های آنها رابطه ذیل وجود دارد.

$$\text{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$



میشود که m میل و b ویا $(0, b)$ نقطه تقاطع با محور y میباشد.

سوال ۲۵: معادله خط مستقیمی را دریابید که میل آن ۴ بوده و محور y را در نقطه -3 قطع نماید؟

حل سوال:

$$m = 4, b = -3$$

$$y = mx + b$$

$$y = (4)x + (-3)$$

$$y = 4x - 3$$

ب: معادله خط مستقیمی که میل و نقطه تقاطع آن با محور x

داده شده باشد: درین حالت از رابطه $y - y_1 = m(x - x_1)$

استفاده میشود.

سوال ۲۶: معادله خط مستقیمی را دریابید که میل آن -2 بوده و

از نقطه $(5, -4)$ عبور میکند؟

حل سوال:

$$m = -2, x_1 = 5, y_1 = -4$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-4) = (-2) \cdot [x - (5)]$$

$$y + 4 = -2x + 10$$

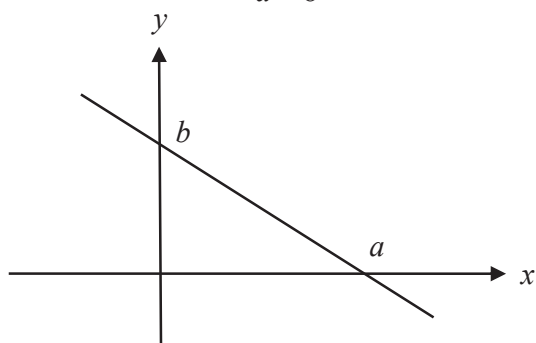
$$2x + y - 6 = 0$$

ج: معادله خط مستقیمی که نقطه تقاطع آن با محور x و y داده

شده باشد: در این حالت نقطه تقاطع با محور x به $(a, 0)$ و

نقطه تقاطع با محور y به $(0, b)$ نشان داده شده و معادله خط

مستقیم آن از رابطه $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ دریافت میشود.



سوال ۲۷: معادله خط مستقیمی را دریابید که محور x را در

$(-3, 0)$ و محور y را در $(0, 7)$ قطع میکند؟

حل سوال:

$$a = -3, b = 7$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

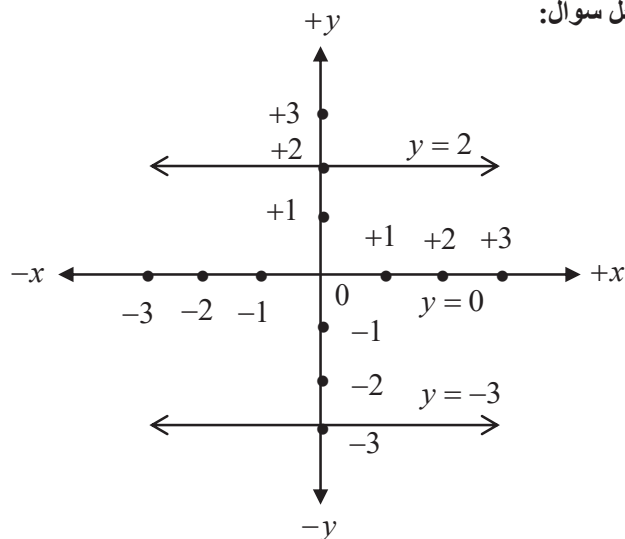
معادله خط مستقیم: با در نظر داشت وضعیت خط مستقیم برای دریافت معادله خط مستقیم حالت های ذیل وجود دارد.

حالت اول: معادله تمام خطوط مستقیم که موازی با محور x باشند $y = c$ میباشد.

c نقطه تقاطع با محور y میباشد.

سوال ۲۲: خطوط $y = 2, y = -3, y = 0$ را رسم نمایید؟

حل سوال:

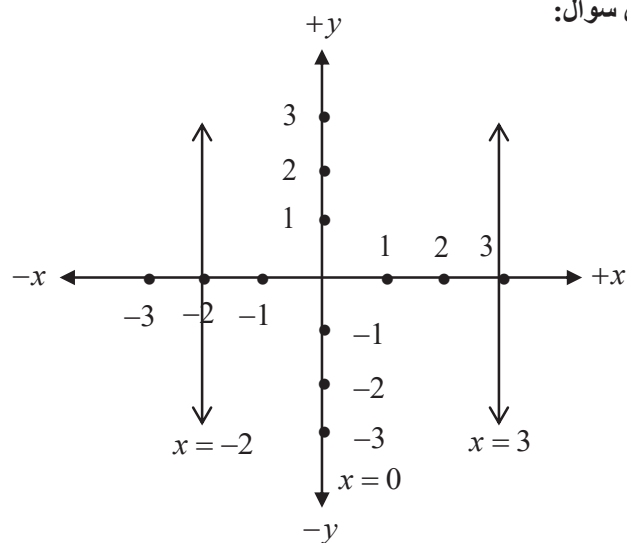


حالت دوم: معادله تمام خطوط مستقیم که موازی با محور y

باشند $x = c$ میباشد و c نقطه تقاطع با محور x میباشد.

سوال ۲۳: خطوط $x = 3, x = -2, x = 0$ را رسم نمایید.

حل سوال:



سوال ۲۴: خطوط $x = 3$ و $y = 3$ با هم در کدام حالت قرار

دارند؟

حل سوال: عمود اند

حالت سوم: برای دریافت معادله خط مستقیم مایل ویا خط مستقیمی که هر دو محور را قطع میکند حالت های ذیل وجود دارد.

الف: معادله خط مستقیمی که میل و نقطه تقاطع آن با محور y

داده شده باشد: درین حالت از رابطه $y = mx + b$ استفاده

زاویه که خط نورمال با جهت مثبت محور x تشکیل میدهد بنام زاویه میل خط نورمال یاد میشود و به θ تیتا نشان داده میشود. فاصله بین مبدا کمیات وضعیه و نقطه تقاطع خط نورمال با خط مستقیم بنام طول نورمال یاد میشود و به حرف P نشان داده میشود.

معادله نورمال یک خط مستقیم عبارت از معادله است که از جنس زاویه میل خط نورمال و طول نورمال دریافت شود. معادله نورمال خط مستقیم L قرار شکل ذیل میباشد.

$$x \cos \theta + y \sin \theta = P$$

یا

$$x \cos \theta + y \sin \theta - P = 0$$

سوال ۲۹: معادله خط مستقیمی را دریابید که طول نارمل آن ۵ واحد و با جهت مثبت محور x زاویه 30° را تشکیل دهد؟

حل سوال:

$$P = 5, \theta = 30^\circ$$

$$x \cos \theta + y \sin \theta - P = 0$$

$$x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ - (5) = 0$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + y \cdot \frac{1}{2} - 5 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$\sqrt{3}x + y - 10 = 0$$

سوال ۳۰: معادله خط مستقیمی را دریابید که فاصله آن تا مبدأ ۶ واحد و زاویه میل خط نارمل آن 45° باشد؟

حل سوال:

$$P = 6, \theta = 45^\circ$$

$$x \cos \theta + y \sin \theta - P = 0$$

$$x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ - (6) = 0$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 12 = 0$$

معادله کلی ویا معادله عمومی خط مستقیم: شکل عمومی معادله خط مستقیم $Ax + By + C = 0$ میباشد.

سوال ۳۱: در معادله $y = 3x + 1$ قیمت های A ، B و C را تعیین کنید؟

حل سوال:

$$y = 3x + 1$$

$$-3x + y - 1 = 0$$

$$A = -3, B = 1, C = -1$$

سوال ۳۲: در معادله $y = 3$ قیمت های A ، B و C را تعیین کنید؟

حل سوال:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{7} = 1 \quad / \cdot (-21)$$

$$7x - 3y = -21$$

$$7x - 3y + 21 = 0$$

د: معادله خط مستقیمی که دو نقطه آن معلوم باشد: اگر دو نقطه $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ یک خط مستقیم داده شده باشد

معادله آن از رابطه $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ دریافت

میشود.

سوال ۲۸: معادله خط مستقیمی که از دو نقطه $A = (-2, 2)$ و

$B = (0, 4)$ میگذرد را دریابید؟

حل سوال:

$$x_1 = -2, y_1 = 2, x_2 = 0, y_2 = 4$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - (2) = \frac{(4) - (2)}{(0) - (-2)} \cdot [x - (-2)]$$

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{0 + 2} \cdot (x + 2)$$

$$y - 2 = \frac{2^1}{2^1} \cdot (x + 2)$$

$$y - 2 = 1 \cdot (x + 2)$$

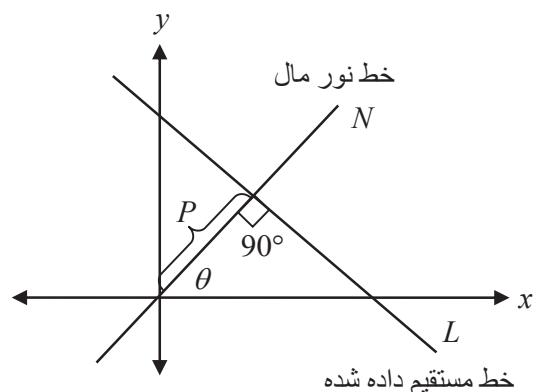
$$y - 2 = x + 2$$

$$y - 2 - x - 2 = 0$$

$$-x + y - 4 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$x - y + 4 = 0$$

معادله نورمال یک خط مستقیم: خط نورمال یک خط مستقیم عبارت از خطی است که از مبدأ گذشته و بالای خط داده شده عمود باشد. قرار شکل:



سوال ۳۶: معادله کلی $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 6 = 0$ را به شکل نورمال تبدیل کنید؟
حل سوال:

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 6 = 0$$

$$A = \sqrt{2}, B = \sqrt{2}, C = 6$$

$$I \rightarrow \frac{1}{-\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{-\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}}$$

$$\frac{1}{-\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2+2}} = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$II \rightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 6 = 0 / \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y - \frac{6}{2} = 0 / \cdot (-1)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y + 3 = 0$$

$$\cos 45^\circ \cdot x + \sin 45^\circ \cdot y + 3 = 0$$

$$x \cos 45^\circ + y \sin 45^\circ + 3 = 0$$

فاصله بین یک خط مستقیم و یک نقطه: برای دریافت فاصله بین یک خط مستقیم و یک نقطه $P_1(x_1, y_1)$ در ابتدا خط مستقیم را به شکل عمومی آن تبدیل میکنیم.

اگر فاصله بین نقطه و خط را به d نشان دهیم، برای دریافت آن از رابطه ذیل استفاده میشود.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

سوال ۳۷: فاصله بین نقطه $P(3, -1)$ و خط $3x - 4y - 3 = 0$ را دریابید؟
حل سوال:

$$3x - 4y - 3 = 0$$

$$A = 3, B = -4, C = -3$$

$$P(3, -1) \rightarrow x_1 = 3, y_1 = -1$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|(3)(3) + (-4)(-1) + (-3)|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

$$d = \frac{|9 + 4 - 3|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$d = \frac{|10|}{\sqrt{25}} \rightarrow d = \frac{10}{5} \rightarrow d = 2$$

$$y = 3x$$

$$-3x + y + 0 = 0$$

$$A = -3, B = 1, C = 0$$

سوال ۳۳: در معادله $x = 4$ قیمت های A ، B و C را تعیین کنید؟
حل سوال:

$$x = 4$$

$$x + 0y - 4 = 0$$

$$A = 1, B = 0, C = -4$$

تبدیل معادله نورمال به معادله عمومی: برای این منظور قیمت های A و B و C را وضع کرده و معادله را ساده میسازیم.
سوال ۳۴: معادله $x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ - 4 = 0$ را به شکل عمومی تبدیل کنید؟
حل سوال:

$$x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ - 4 = 0$$

$$x \left(\frac{1}{2}\right) + y \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4 = 0 / \cdot 2$$

$$x + \sqrt{3}y - 8 = 0$$

تبدیل معادله عمومی به معادله نورمال: اگر معادله یک خط مستقیم به شکل $Ax + By + C = 0$ داده شده باشد و خواسته باشیم که آنرا به شکل نورمال $x \cos \theta + y \sin \theta - P = 0$

تبدیل کنیم، اطراف معادله را در $\frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$ ضرب می کنیم.

اشاره مخرج خلاف اشاره C انتخاب میشود.

اگر C صفر باشد، اشاره مانند اشاره b انتخاب میشود.

سوال ۳۵: معادله $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$ را به شکل نورمال تبدیل کنید؟
حل سوال:

$$\sqrt{3}x + y - 10 = 0$$

$$A = \sqrt{3}, B = 1, C = -10$$

$$I \rightarrow \frac{1}{+\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}}$$

$$\frac{1}{+\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$II \rightarrow \sqrt{3}x + y - 10 = 0 / \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{10}{2} = 0$$

$$\cos 30^\circ \cdot x + \sin 30^\circ \cdot y - 5 = 0$$

$$x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ - 5 = 0$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} [(-24 - 15 + 5) - (-18 + 4 - 25)]$$

$$A = \frac{1}{2} [(-34) - (-39)]$$

$$A = \frac{1}{2} [-34 + 39]$$

$$A = \frac{1}{2} (5) \rightarrow A = \frac{5}{2} \rightarrow A = 2.5$$

سوال ۴۰: مساحت مثلثی را دریابید که رأس های آن در نقاط $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ و $C(12,4)$ قرار داشته باشد؟

حل سوال:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & 1 \\ 12 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 6 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} [(0 + 0 + 32) - (72 + 0 + 0)]$$

$$A = \frac{1}{2} [(32) - (72)]$$

$$A = \frac{1}{2} [32 - 72]$$

$$A = \frac{1}{2} (-40)$$

$$A = \frac{-40}{2} \rightarrow A = -20$$

دریافت فاصله بین دو خط موازی: برای این منظور معادله خط اولی را به شکل عمومی تبدیل کرده و قیمت های A ، B و C را از آن تعیین میکنیم. در معادله خط دومی بجای x صفر وضع کرده و قیمت y را محاسبه میکنیم. نقطه حاصل شده عبارت از نقطه (x_1, y_1) میباشد، بعداً برای دریافت فاصله از رابطه ذیل استفاده میکنیم.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

سوال ۳۸: فاصله بین خطوط مستقیم $y = 3x + 5$ و $6x - 2y - 4 = 0$ را دریابید؟

حل سوال:

$$I \rightarrow y = 3x + 5$$

$$-3x + y - 5 = 0$$

$$A = -3, B = 1, C = -5$$

$$II \rightarrow 6x - 2y - 4 = 0$$

$$x = 0, y = ?$$

$$6(0) - 2y - 4 = 0$$

$$0 - 2y - 4 = 0$$

$$-2y = +4 / \div (-2)$$

$$y = -2$$

$$(x_1, y_1) = (0, -2) \rightarrow x_1 = 0, y_1 = -2$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|(-3)(0) + (1)(-2) + (-5)|}{\sqrt{(-3)^2 + (1)^2}}$$

$$d = \frac{|-0 - 2 - 5|}{\sqrt{9 + 1}}$$

$$d = \frac{|-9|}{\sqrt{10}} \rightarrow d = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

دریافت مساحت مثلث:

در صورتیکه رأس های مثلث داده شده باشند مساحت مثلث از رابطه ذیل دریافت میشود.

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

سوال ۳۹: مساحت مثلثی را دریابید که رأس های آن در نقاط $P_1(4, -5)$ ، $P_2(5, -6)$ و $P_3(3, 1)$ قرار داشته باشد؟

حل سوال:

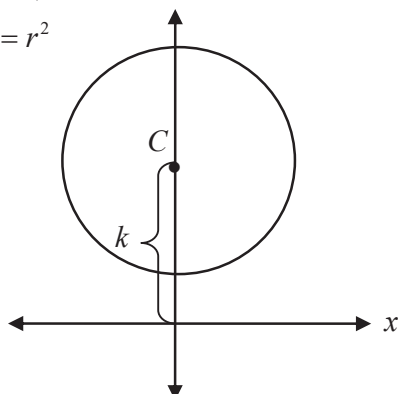
هندسه تحلیلی

2- اگر مرکز دایره بالای محور y باشد در این حالت قیمت $h = 0$ میباید و معادله دایره شکل ذیل را اختیار میکند.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-0)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$x^2 + (y-k)^2 = r^2$$

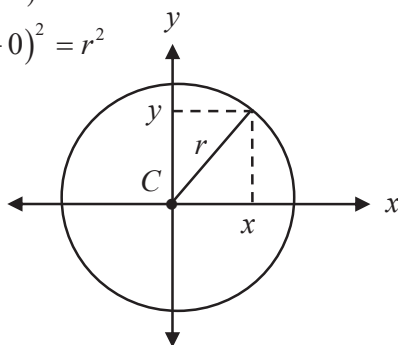


3- اگر مرکز دایره بالای مبدا کمیات وضعیه قرار داشته باشد در این حالت قیمت $h = 0$ و $k = 0$ میباشند و معادله دایره شکل ذیل را اختیار میکند.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

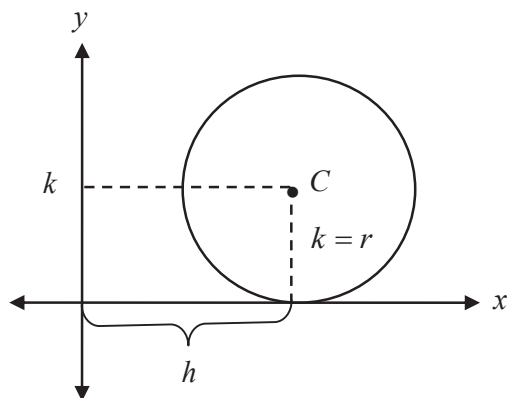
$$x^2 + y^2 = r^2$$



4- اگر دایره با محور x مماس باشد در این حالت $r = k$ میباید و معادله دایره شکل ذیل را اختیار میکند.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-h)^2 + (y-r)^2 = r^2$$



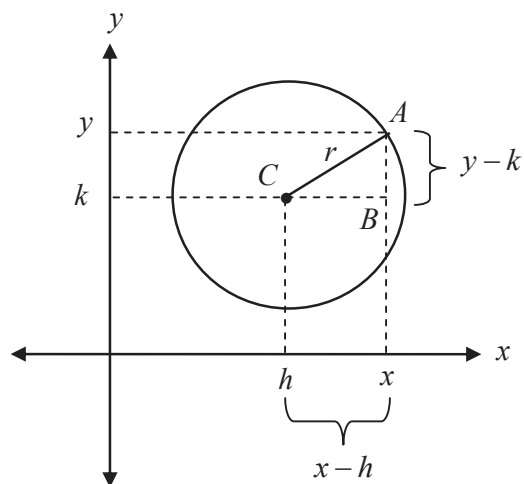
فصل دوم

دایره (Circle)

تهیه و ترتیب: انجنیر محمد امین محمدی

تعریف دایره: محل هندسی نقاطی که فاصله تمام آنها از یک نقطه مستقر مساوی به طول ثابت r باشد، دایره نامیده میشود. نقطه مستقر مرکز دایره و فاصله ثابت r شعاع دایره نامیده میشود.

معادله دایره: اگر مرکز دایره نقطه $C(h, k)$ و شعاع دایره r باشد، معادله دایره از رابطه ذیل دریافت میشود.



$$(BC)^2 + (AB)^2 = (AC)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

این رابطه بنام معادله سنتزرد یا معیاری دایره یاد میشود.

حالات خاص:

1- اگر مرکز دایره بالای محور x باشد در این حالت قیمت $k = 0$ میباید و معادله دایره شکل ذیل را اختیار میکند.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-h)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

$$(x-h)^2 + y^2 = r^2$$



سوال ۱: مرکز یک دایره در نقطه $C(-1, -3)$ و شعاع آن $\sqrt{6}$ واحد است، معادله آنرا دریابید؟

حل سوال:

$$h = -1, k = -3, r = \sqrt{6}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$[x - (-1)]^2 + [y - (-3)]^2 = (\sqrt{6})^2$$

$$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 6$$

سوال ۲: مرکز یک دایره در نقطه $C(5, -4)$ و شعاع آن ۳ واحد است، معادله آنرا دریابید؟

حل سوال:

$$h = 5, k = -4, r = 3$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 9$$

سوال ۳: معادله دایره را دریابید که انجام های یک قطر آن نقاط $A(2, -4)$ و $B(-2, 6)$ میباشد؟

حل سوال:

اول: نقطه تنصیف قطر را دریافت میکنیم که مرکز دایره میباشد.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightarrow x = \frac{(2) + (-2)}{2}$$

$$\rightarrow x = \frac{2 - 2}{2} \rightarrow x = \frac{0}{2} \rightarrow x = 0$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} \rightarrow y = \frac{(-4) + (6)}{2}$$

$$\rightarrow y = \frac{-4 + 6}{2} \rightarrow y = \frac{2}{2} \rightarrow y = 1$$

$$C(x, y) \rightarrow C(0, 1)$$

دوم: فاصله AB را دریافت میکنیم که طول قطر دایره میباشد و نصف طول قطر طول شعاع دایره میباشد.

$$A(2, -4), B(2, 6)$$

$$x_1 = x_2$$

$$AB = |y_2 - y_1| \rightarrow AB = |(6) - (-4)|$$

$$AB = |6 + 4| \rightarrow AB = |10| \rightarrow AB = 10$$

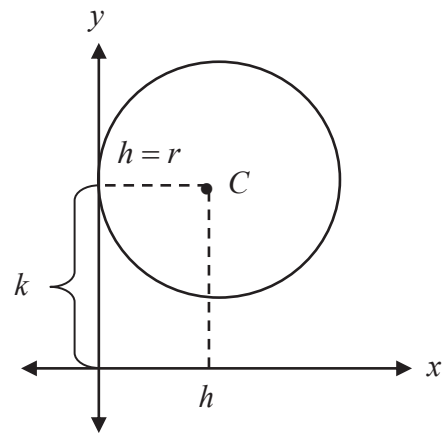
$$\Rightarrow d = 10 \rightarrow r = \frac{d}{2} \rightarrow r = 5$$

سوم: معادله دایره را دریافت میکنیم.

5- اگر دایره با محور y مماس باشد در این حالت قیمت $h = r$ میباشد و معادله دایره شکل ذیل را اختیار میکند.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

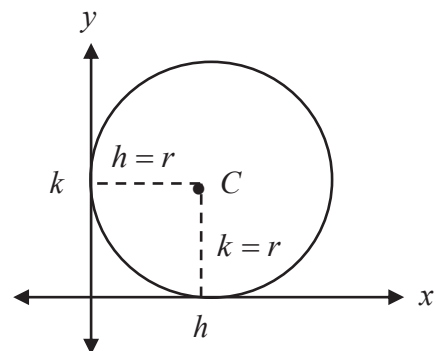
$$(x - r)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



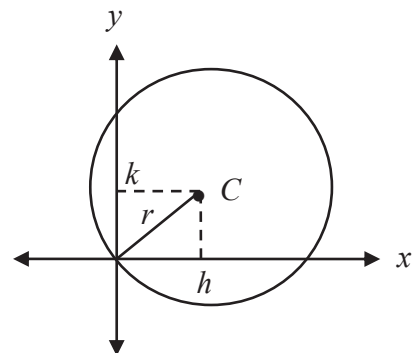
6- اگر دایره با محور x و محور y مماس باشد در این حالت $h = r$ و $k = r$ میباشد و معادله دایره شکل ذیل را اختیار میکند.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$



7- اگر یک دایره از مبدا کمیات وضعیه گذشته باشد در آنصورت همیشه $h^2 + k^2 = r^2$ میباشد.



$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{40})^2$$

$$x^2 + y^2 = 40$$

سوال ۶: معادله دایره را بدست آورید که مرکز آن نقطه $(1,7)$ و با خط مستقیم $x+3y=12$ مماس می باشد؟

حل سوال:

اول: فاصله نقطه $(1,7)$ را از خط مستقیم $x+3y=12$ دریافت میکنیم که عبارت از شعاع دایره می باشد. بخاطریکه شعاع دایره در نقطه تماس بالای مماس عمود می باشد.

$$x+3y=12 \rightarrow x+3y-12=0$$

$$A=1, B=3, C=-12$$

$$P(1,7) \rightarrow x_1=1, y_1=7$$

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$r = \frac{|(1)(1) + (3)(7) + (-12)|}{\sqrt{(1)^2 + (3)^2}}$$

$$r = \frac{|1+21-12|}{\sqrt{1+9}} \rightarrow r = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} \rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{10}}$$

دوم: معادله دایره را دریافت میکنیم.

$$C(1,7), h=1, k=7, r = \frac{10}{\sqrt{10}}$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 = \left(\frac{10}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 = \frac{100}{10}$$

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 = 10$$

سوال ۷: معادله دایره را دریابید که مرکز آن در نقطه $A(-5,7)$ و با محور x مماس می باشد؟

حل سوال:

$$C(-5,7) \rightarrow h=-5, k=7$$

$$r = |k| \rightarrow r = 7$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x+5)^2 + (y-7)^2 = 49$$

$$C(0,1), r=5$$

$$h=0, k=1$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x+0)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

$$x^2 + (y-5)^2 = 25$$

سوال ۳: معادله دایره را دریابید که مرکز آن در نقطه $A(4,-2)$ و از نقطه $B(0,1)$ عبور میکند؟

حل سوال:

اول: فاصله AB را دریافت میکنیم که طول شعاع دایره می باشد.

$$A(4,-2), B(0,1)$$

$$x_1=4, x_2=0$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow \Delta x = (0) - (4) \rightarrow \Delta x = 0 - 4$$

$$\Delta x = -4$$

$$y_1 = -2, y_2 = 1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 \rightarrow \Delta y = (1) - (-2) \rightarrow \Delta y = 1 + 2$$

$$\Delta y = 3$$

$$AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow AB = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$$

$$AB = \sqrt{16+9} \rightarrow AB = \sqrt{25} \rightarrow AB = 5$$

دوم: معادله دایره را دریافت میکنیم.

$$A(4,-2) \rightarrow C(4,-2), r=5$$

$$h=4, k=-2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$$

سوال ۵: معادله دایره را دریابید که مرکز آن در مبدأ کمیات وضعیه بوده و از نقطه $P(2,6)$ میگذرد؟

حل سوال:

اول: فاصله نقطه را از مبدأ دریافت میکنیم که طول شعاع می باشد.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(2)^2 + (6)^2} \rightarrow r = \sqrt{4+36} \rightarrow r = \sqrt{40}$$

دوم: معادله دایره را دریافت میکنیم.

$$C(0,0), h=0, k=0, r = \sqrt{40}$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$h = 0, k = 0$$

$$r^2 = 1/\sqrt{\quad} \rightarrow r = 1$$

$$C(0,0), r = 1$$

سوال ۱۳: در دایره $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{9}$ مرکز و شعاع آنرا

تعیین کنید؟

حل سوال:

$$h = 0, k = -\frac{1}{2}$$

$$r^2 = \frac{1}{9}/\sqrt{\quad} \rightarrow r = \frac{1}{3}$$

$$C\left(0, -\frac{1}{2}\right), r = \frac{1}{3}$$

معادله انکشاف یافته دایره: اگر معادله معیاری دایره انکشاف داده شود معادله انکشاف یافته دایره حاصل میشود.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x)^2 - 2(x)(h) + (h)^2 + (y)^2 - 2(y)(k) + (k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$a = -2h$$

$$b = -2k$$

$$c = h^2 + k^2 - r^2$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

اگر معادله انکشاف یافته دایره داده شده باشد، شعاع و مرکز دایره طور ذیل دریافت میشود.

در ابتدا از روابط $f = \frac{b}{2}$ و $g = \frac{a}{2}$ قیمت های f و g را

دریافته و بعداً از روابط ذیل استفاده میکنیم.

$$(h, k) = (-g, -f)$$

$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

سوال ۱۴: در دایره $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ ، مرکز و شعاع را تعیین کنید؟

حل سوال:

$$a = 4, b = -2, c = 1$$

$$g = \frac{a}{2} \rightarrow g = \frac{4}{2} \rightarrow g = 2$$

سوال ۸: معادله دایره را دریابید که مرکز آن در نقطه $A(-3, 2)$ و با محور y مماس میباشد؟

حل سوال:

$$C(-3, 2) \rightarrow h = -3, k = 2$$

$$r = |h| \rightarrow r = 3$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$$

سوال ۹: در دایره $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 81$ مرکز و شعاع آنرا تعیین کنید؟

حل سوال:

$$h = +1, k = +5$$

$$r^2 = 81/\sqrt{\quad} \rightarrow r = 9$$

$$C(1, 5), r = 9$$

سوال ۱۰: در دایره $(x+4)^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 24$ مرکز و شعاع آنرا تعیین کنید؟

حل سوال:

$$h = -4, k = -\frac{1}{3}$$

$$r^2 = 24/\sqrt{\quad} \rightarrow r = \sqrt{24}$$

$$\rightarrow r = \sqrt{4 \cdot 6} \rightarrow r = 2\sqrt{6}$$

$$C\left(-4, -\frac{1}{3}\right), r = 2\sqrt{6}$$

سوال ۱۱: در دایره $(x+6)^2 + y^2 = 12$ مرکز و شعاع آنرا تعیین کنید؟

حل سوال:

$$h = -6, k = 0$$

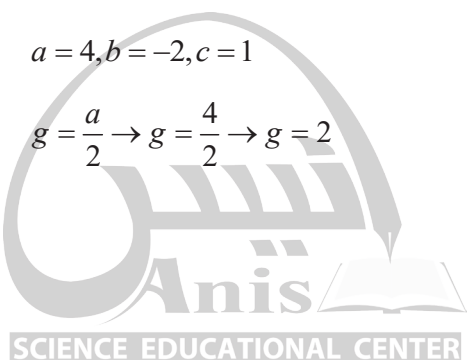
$$r^2 = 12/\sqrt{\quad} \rightarrow r = \sqrt{12}$$

$$\rightarrow r = \sqrt{4 \cdot 3} \rightarrow r = 2\sqrt{3}$$

$$C(-6, 0), r = 2\sqrt{3}$$

سوال ۱۲: در دایره $x^2 + y^2 = 1$ مرکز و شعاع آنرا تعیین کنید؟

حل سوال:



$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \rightarrow r = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{3}} \rightarrow r = \sqrt{\frac{1+4+3}{9}} \rightarrow r = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$r = \frac{\sqrt{4 \cdot 2}}{\sqrt{9}} \rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

سوال ۱۷: معادله دایره را دریابید که با دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 11$ متحدالمرکز بوده و با خط $3x - 4y + 17 = 0$ مماس میباشد؟

حل سوال:

اول: مرکز دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 11$ را دریافت میکنیم.

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$$

$$a = -4, b = 6, c = -11$$

$$g = \frac{a}{2} \rightarrow g = \frac{-4}{2} \rightarrow g = -2$$

$$f = \frac{b}{2} \rightarrow f = \frac{6}{2} \rightarrow f = 3$$

$$(h, k) = (-g, -f)$$

$$(h, k) = (+2, -3)$$

دوم: شعاع دایره را دریافت میکنیم که فاصله مرکز دایره از خط مستقیم شعاع دایره میباشد.

$$(+2, -3) \rightarrow x_1 = 2, y_1 = -3$$

$$3x - 4y + 17 = 0$$

$$A = 3, B = -4, C = +17$$

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$r = \frac{|(3)(2) + (-4)(-3) + (17)|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

$$r = \frac{|6 + 12 + 17|}{\sqrt{9 + 16}} \rightarrow r = \frac{|35|}{\sqrt{25}}$$

$$r = \frac{35}{5} \rightarrow r = 7$$

سوم: معادله دایره را مینویسیم.

$$f = \frac{b}{2} \rightarrow f = \frac{-2}{2} \rightarrow f = -1$$

$$(h, k) = (-g, -f) \rightarrow (h, k) = (-2, +1)$$

$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \rightarrow r = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 - (1)}$$

$$r = \sqrt{4 + 1 - 1} \rightarrow r = \sqrt{4} \rightarrow r = 2$$

سوال ۱۵: در دایره $x^2 + y^2 + 5x - 8 = 0$ ، مرکز و شعاع را تعیین کنید؟

حل سوال:

$$a = 5, b = 0, c = -8$$

$$g = \frac{a}{2} \rightarrow g = \frac{5}{2}$$

$$f = \frac{b}{2} \rightarrow f = \frac{0}{2} \rightarrow f = 0$$

$$(h, k) = (-g, -f) \rightarrow (h, k) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} \rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + (0)^2 - (-8)}$$

$$r = \sqrt{\frac{25}{4} + 8} \rightarrow r = \sqrt{\frac{57}{4}} \rightarrow r = \frac{\sqrt{57}}{2}$$

سوال ۱۶: در دایره $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ ، مرکز و شعاع را تعیین کنید؟

حل سوال:

$$3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y - 1 = 0 \div 3$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y - \frac{1}{3} = 0$$

$$a = -\frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}, c = -\frac{1}{3}$$

$$g = \frac{a}{2} \rightarrow g = \frac{-\frac{2}{3}}{2} \rightarrow g = -\frac{1}{3}$$

$$f = \frac{b}{2} \rightarrow f = \frac{\frac{4}{3}}{2} \rightarrow f = \frac{2}{3}$$

$$(h, k) = (-g, -f) \rightarrow (h, k) = \left(+\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$2x + y - 1 = 0$$

$$y = -2x + 1$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + (-2x + 1)^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + (-2x)^2 + 2(-2x)(1) + (1)^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 - 4x + 1 + 2x - 4 = 0$$

$$5x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$a = 5, b = -2, c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(5)(-3)$$

$$\Delta = 4 + 60$$

$$\Delta = 64$$

چون $\Delta > 0$ است بناءً خط و دایره در دو نقطه متقاطع اند.

سوال ۱۹: وضعیت خط مستقیم $y - x + 1 = 0$ را با دایره

$$x^2 + y^2 + 2y = 1$$
 بررسی کنید؟

حل سوال:

$$y - x + 1 = 0$$

$$y = x - 1$$

$$x^2 + y^2 + 2y = 1$$

$$x^2 + (x - 1)^2 + 2(x - 1) - 1 = 0$$

$$x^2 + (x)^2 - 2(x)(1) + (1)^2 + 2x - 2 - 1 = 0$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 - 1 = 0$$

$$2x^2 - 2 = 0 \rightarrow a = 2, b = 0, c = -2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = (0)^2 - 4(2)(-2)$$

$$\Delta = 0 + 16$$

$$\Delta = 16$$

چون $\Delta > 0$ است بناءً خط و دایره در دو نقطه متقاطع اند.

سوال ۲۰: اگر خط مستقیم $y = 3x + b$ با دایره $x^2 + y^2 = 10$

مماس باشد، قیمت b را تعیین کنید؟

حل سوال: چون خط با دایره مماس است و شعاع بالای مماس در

نقطه تماس عمود می‌باشد و فاصله مرکز از خط مماس مساوی به

شعاع دایره است.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 10 \rightarrow r^2 = 10 / \sqrt{\quad} \rightarrow r = \sqrt{10}$$

$$C(+2, -3) \rightarrow h = 2, k = -3, r = 7$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - (+2))^2 + (y - (-3))^2 = (7)^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$$

یادداشت:

الف: اگر شعاع دایره مثبت باشد ($r > 0$) دایره حقیقی گفته

میشود، یعنی دایره وجود دارد.

ب: اگر شعاع دایره صفر باشد ($r = 0$) دایره نقطوی گفته

میشود، یعنی دایره یک نقطه است.

ج: اگر شعاع دایره منفی باشد ($r < 0$) دایره مجازی گفته

میشود، یعنی دایره وجود ندارد.

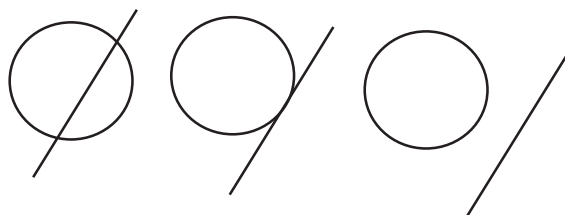
وضعیت خط مستقیم و دایره: خط مستقیم و دایره امکان دارد

یکی از سه حالت ذیل را داشته باشند.

الف: متقاطع

ب: مماس

ج: غیر متقاطع



اگر معادله خط مستقیم و معادله دایره داده شده باشد، وضعیت خط

و دایره طور ذیل دریافت میشود.

معادله خط را برای یک متحول حل کرده و قیمت آنرا در معادله

دایره وضع میکنیم که در نتیجه یک معادله یک مجهوله درجه دوم

تشکیل میشود و دلنا را مطالعه میکنیم که سه حالت ذیل وجود

دارد.

الف: اگر $\Delta > 0$ باشد، خط و دایره در دو نقطه متقاطع اند.

ب: اگر $\Delta = 0$ باشد، خط و دایره با هم مماس اند و یا در یک

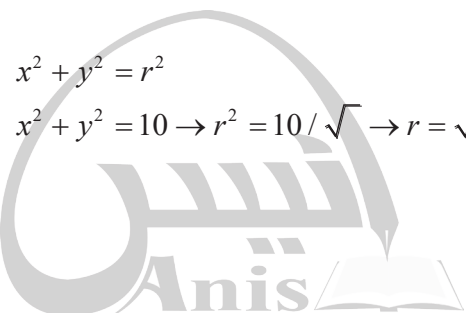
نقطه متقاطع اند.

ج: اگر $\Delta < 0$ باشد، خط و دایره یگدیگر را قطع نمی کنند.

سوال ۱۸: وضعیت خط مستقیم $2x + y - 1 = 0$ را با دایره

$$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$$
 بررسی کنید؟

حل سوال:



$$m = -\frac{h-x_1}{k-y_1} \rightarrow m = -\frac{(1)-(-2)}{(2)-(-6)}$$

$$\rightarrow m = -\frac{1+2}{2+6} \rightarrow m = -\frac{3}{8}$$

سوال ۲۲: معادله خط مستقیمی را دریابید که در نقطه (3,5) به دایره که مرکز آن (1,2) میباشد، مماس رسم شود؟

حل سوال:

$$P(3,5) \rightarrow x_1 = 3, y_1 = 5$$

$$C(1,2) \rightarrow h = 1, k = 2$$

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

$$y - (5) = -\frac{(1) - (3)}{(2) - (5)}(x - (3))$$

$$y - 5 = -\frac{1 - 3}{2 - 5}(x - 3)$$

$$y - 5 = -\frac{-2}{-3}(x - 3)$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3) / \cdot 3$$

$$3y - 15 = -2(x - 3)$$

$$3y - 15 = -2x + 6$$

$$2x + 3y - 21 = 0$$

سوال ۲۳: معادله خط مماسی را دریابید که به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 18 = 0$ در نقطه (-2, -5) مماس رسم شود؟

حل سوال:

اول: مرکز دایره را دریافت میکنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 18 = 0$$

$$a = -2, b = 3, c = -18$$

$$g = \frac{a}{2} \rightarrow g = \frac{-2}{2} \rightarrow g = -1$$

$$f = \frac{b}{2} \rightarrow f = \frac{3}{2}$$

$$C(-g, -f) \rightarrow C\left(+1, -\frac{3}{2}\right)$$

دوم: معادله را دریافت میکنیم.

$$C(0,0) \rightarrow x_1 = 0, y_1 = 0, r = \sqrt{10}$$

$$y = 3x + b$$

$$-3x + y - b = 0$$

$$A = -3, B = 1, C = -b$$

$$r = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sqrt{10} = \frac{|(-3)(0) + (1)(0) + (-b)|}{\sqrt{(-3)^2 + (1)^2}}$$

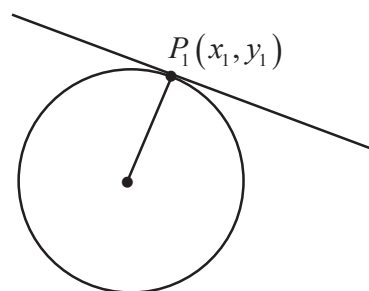
$$\sqrt{10} = \frac{|0 + 0 - b|}{\sqrt{10}} \rightarrow \sqrt{10} = \frac{|-b|}{\sqrt{10}}$$

$$\sqrt{10} = \frac{b}{\sqrt{10}} / \cdot \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = b$$

$$\sqrt{10^2} = b \rightarrow 10 = b \Rightarrow b = 10$$

معادله خط مماس به دایره: اگر در یک نقطه $P_1(x_1, y_1)$ به یک دایره که مرکز آن $C(h, k)$ باشد، مماس رسم شود معادله خط مماس از رابطه ذیل دریافت میشود.

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$



میل معادله خط مماس: میل معادله خط مماس از رابطه $m = -\frac{h - x_1}{k - y_1}$ دریافت میشود.

سوال ۲۱: میل خط مستقیمی را دریابید که در نقطه (-2, -6) به دایره که مرکز آن (1,2) میباشد، مماس رسم شود؟

حل سوال:

$$P(-2, -6) \rightarrow x_1 = -2, y_1 = -6$$

$$C(1,2) \rightarrow h = 1, k = 2$$

هندسه تحلیلی

$$PT = \sqrt{f(x, y)}$$

سوال ۲۵: از نقطه $A(-2, 2)$ به دایره

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 - 25 = 0$$

مماس را دریابید؟

حل سوال:

$$A(-2, 2) \rightarrow x = -2, y = 2, PT = \sqrt{f(x, y)}$$

$$PT = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2 - 25}$$

$$PT = \sqrt{[(-2)-3]^2 + [(2)+4]^2 - 25}$$

$$PT = \sqrt{(-2-3)^2 + (2+4)^2 - 25}$$

$$PT = \sqrt{(-5)^2 + (6)^2 - 25}$$

$$PT = \sqrt{25 + 36 - 25}$$

$$PT = \sqrt{36}$$

$$PT = 6$$

سوال ۲۶: از نقطه $A(5, 0)$ به دایره $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

مماس رسم شده است، طول مماس را دریابید؟

حل سوال:

$$A(5, 0) \rightarrow x = 5, y = 0, PT = \sqrt{f(x, y)}$$

$$PT = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 3}$$

$$PT = \sqrt{(5)^2 + (0)^2 - 2(5) - 3}$$

$$PT = \sqrt{25 + 0 - 10 - 3}$$

$$PT = \sqrt{25 - 13}$$

$$PT = \sqrt{12}$$

$$PT = \sqrt{4 \cdot 3}$$

$$PT = 2\sqrt{3}$$

$$P(-2, -5) \rightarrow x_1 = -2, y_1 = -5$$

$$C\left(+1, -\frac{3}{2}\right) \rightarrow h = 1, k = -\frac{3}{2}$$

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

$$y - (-5) = -\frac{(1) - (-2)}{\left(-\frac{3}{2}\right) - (-5)}(x - (-2))$$

$$\rightarrow y + 5 = -\frac{1+2}{-\frac{3}{2}+5}(x+2)$$

$$\rightarrow y + 5 = -\frac{3}{-3+10}(x+2)$$

$$\rightarrow y + 5 = -\frac{3}{7}(x+2)$$

$$y + 5 = -\frac{6}{7}(x+2) / \cdot 7$$

$$7y + 35 = -6(x+2)$$

$$7y + 35 = -6x - 12$$

$$6x + 7y + 47 = 0$$

حالت خاص: اگر مرکز دایره در مبدأ کمیات وضعیه باشد، معادله خط مماس به دایره شکل ذیل را اختیار میکند.

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2$$

سوال ۲۴: معادله خط مماس به دایره که مرکز آن در مبدأ کمیات

وضعیه قرار دارد در نقطه $(4, -3)$ دریابید؟

حل سوال:

$$(4, -3) \rightarrow x_1 = 4, y_1 = -3$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}$$

$$r = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2$$

$$x \cdot (4) + y \cdot (-3) = (5)^2$$

$$4x - 3y = 25$$

محاسبه طول مماس:

در ابتدا معادله دایره را به شکل $f(x, y) = 0$ تبدیل میکنیم بعداً طول مماس را از رابطه ذیل دریافت میکنیم.

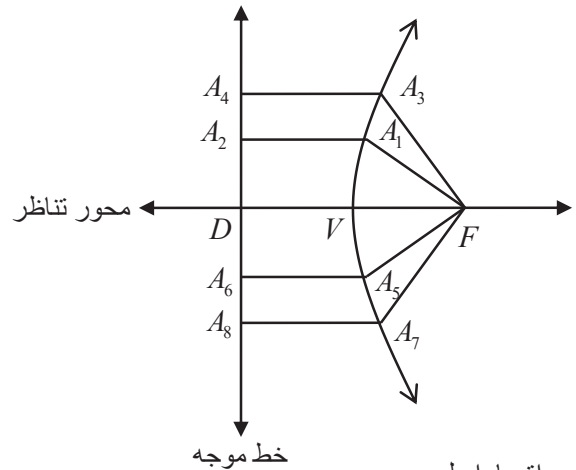
پارابول (Parabola)

تهیه و ترتیب: انجنیر محمد امین محمدی

تعریف پارابول: محل هندسی تمام نقاطی که در یک مستوی واقع بوده و از یک نقطه ثابت و یک خط مستقیم به یک فاصله باشد پارابول نامیده میشود.

نقطه ثابت بنام محراق پارابول و خط مستقیم بنام موج و یا هادی پارابول یاد میشود.

قرار شکل پارابول طور ذیل تعریف میشود.



F محراق پارابول

V رأس پارابول

D خط موج پارابول

$$FV = VD$$

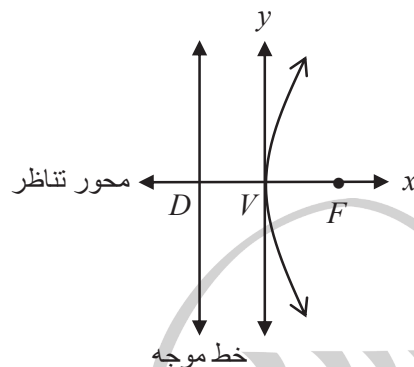
$$FA_1 = A_1A_2, \quad FA_3 = A_3A_4$$

$$FA_5 = A_5A_6, \quad FA_7 = A_7A_8$$

محور تناظر پارابول: خطی که از رأس پارابول عبور کرده و پارابول را به دو حصه مساوی تقسیم میکند بنام محور تناظر یاد میشود.

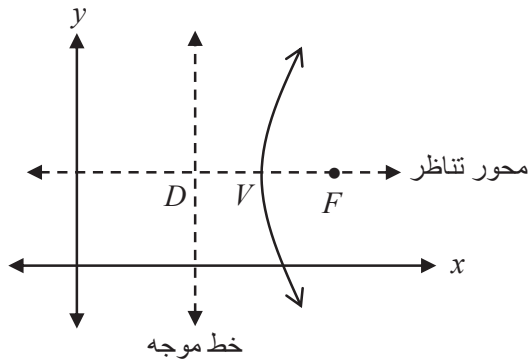
محور تناظر امکان دارد محور x ، محور y و یا یک خط موازی به یکی از این محورها باشد.

قرار شکل: محور تناظر محور x میباشد.

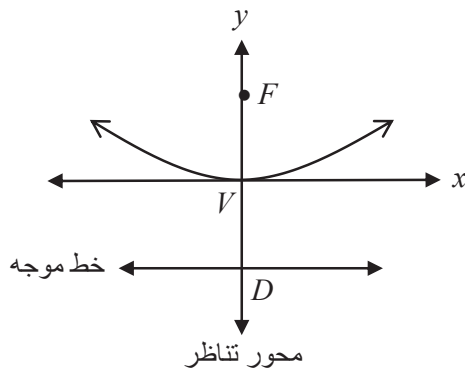


خط موج

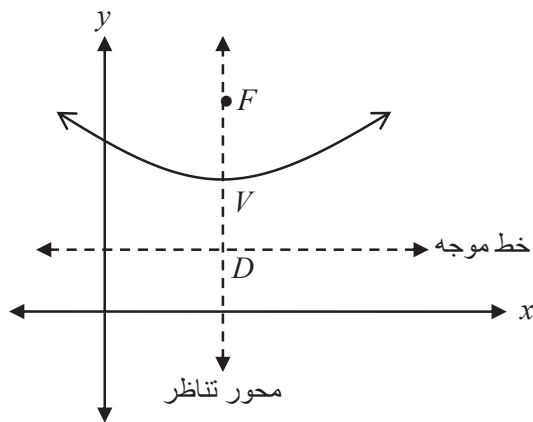
قرار شکل: محور تناظر موازی به محور x می باشد.



قرار شکل: محور تناظر محور y میباشد.



قرار شکل: محور تناظر موازی به محور y می باشد.



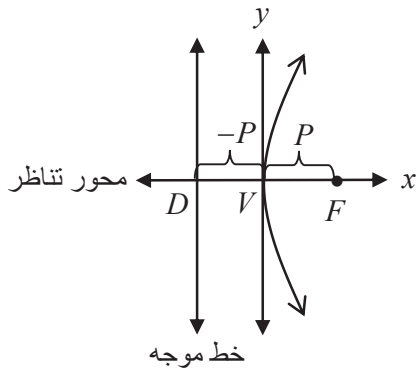
وتر پارابول: خط مستقیمی که دو نقطه پارابول را باهم وصل کند وتر پارابول نامیده میشود.

وتری که از محراق عبور کند وتر محراقی نامیده میشود و اگر از محراق عبور کرده و بالای محور تناظر عمود باشد وتر عمودی نامیده میشود.

در پارابول، فاصله بین رأس و محراق بنام فاصله محراقی یاد میشود و به حرف p یا f نشان داده میشود. طول وتر عمودی چهار برابر فاصله محراقی است.

قرار شکل:

معادله پارابول افقی که رأس آن در مبدا باشد: قرار شکل با در نظر داشت یک نقطه بالای پارابول معادله این نوع پارابول طور ذیل دریافت میشود.



مشخصات پارابول افقی که دهن آن به طرف راست یا به طرف چپ باشد قرار ذیل میباشد.

1- معادله پارابول: $y^2 = 4Px$

2- رأس پارابول: $V(0,0)$

3- محراق پارابول: $F(P,0)$

4- محور تناظر یا محور محراقی پارابول: $y = 0$

5- خط موجه یا هادی پارابول: $x = -P$

6- طول وتر عمودی پارابول: $L = 4|P|$

سوال 1: معادله پارابول $y^2 = 8x$ را در نظر گرفته، رأس، محراق، معادله خط موجه، معادله محور تناظر و طول وتر عمودی آنرا دریابید و گراف آنرا رسم کنید؟

حل سوال: معادله داده شده را با معادله ستندرد مقایسه میکنیم.

$$y^2 = 8x \rightarrow y^2 = 4px$$

$$4p = 8 / \div 4 \rightarrow p = 2$$

رأس پارابول: $V(0,0)$

محراق پارابول: $F(p,0) \rightarrow F(2,0)$

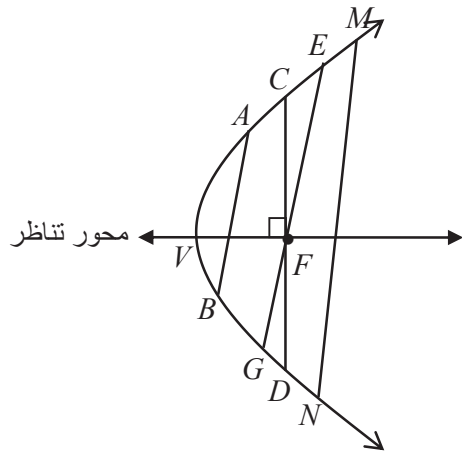
محور تناظر یا محور محراقی محور x یا $y = 0$ میباشد.

خط موجه یا خط هادی:

$$x = -p \rightarrow x = -(2) \rightarrow x = -2$$

طول وتر عمودی:

$$MN = L = 4|p| \rightarrow L = 4|2| \rightarrow L = 8$$



وترهای پارابول میباشد.

وترهای محراقی پارابول میباشد.

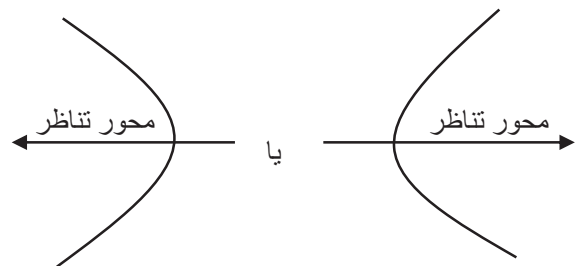
وتر عمودی پارابول میباشد.

FV یا P فاصله محراقی پارابول میباشد.

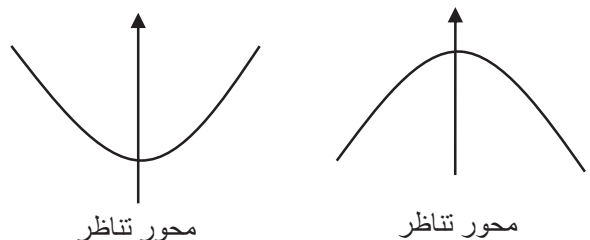
$CD = 4|P|$ وتر عمودی چهار برابر فاصله محراقی میباشد.

انواع پارابول: پارابول دو نوع میباشد افقی و عمودی.

پارابول افقی: پارابولی که محور تناظر آن افقی باشد پارابول افقی نامیده میشود.



پارابول عمودی: پارابولی که محور تناظر آن عمودی باشد پارابول عمودی نامیده میشود.



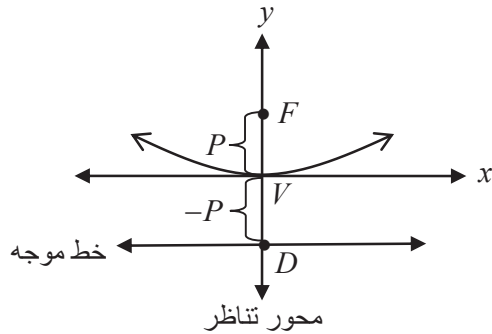
یادداشت:

الف: در پارابول افقی اگر $p > 0$ باشد دهن پارابول به طرف راست می‌باشد.

ب: در پارابول افقی اگر $p < 0$ باشد دهن پارابول به طرف راست می‌باشد.

ج: اگر x درجه اول و y درجه دوم باشد پارابول افقی است.

معادله پارابول عمودی که رأس آن در مبدأ باشد: قرار شکل معادله پارابول طور ذیل دریافت می‌شود.



مشخصات پارابول عمودی که دهن آن به طرف بالا یا به طرف پایین باشد قرار ذیل می‌باشند.

$$1- \text{ معادله پارابول: } x^2 = 4Py$$

$$2- \text{ راس پارابول: } V(0,0)$$

$$3- \text{ محراق پارابول: } F(0, P)$$

$$4- \text{ محور تناظر یا محور محراقی پارابول: } x = 0$$

$$5- \text{ خط موج یا هادی پارابول: } y = -P$$

$$6- \text{ طول وتر عمودی پارابول: } L = 4|P|$$

سوال ۳: معادله پارابول $x^2 = 8y$ را در نظر گرفته، رأس، محراق، معادله خط موج، معادله محور تناظر و طول وتر عمودی آنرا دریابید و گراف آنرا رسم نمایید؟

حل سوال: معادله داده شده را با معادله استاندارد مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 = 8x \rightarrow x^2 = 4py$$

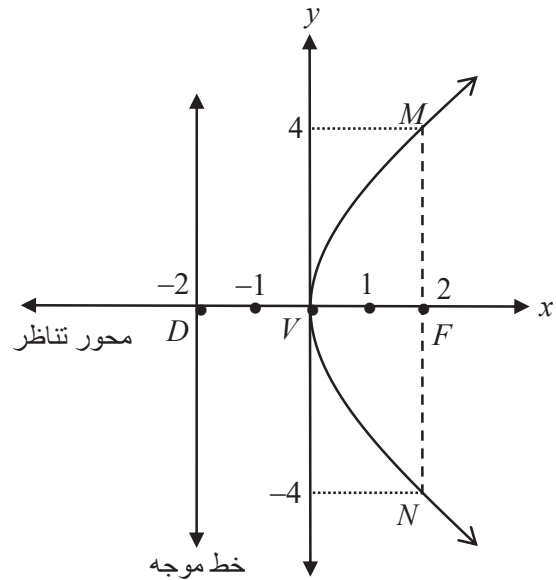
$$4p = 8 / \div 4 \rightarrow p = 2$$

$$\text{راس پارابول: } V(0,0)$$

$$\text{محراق پارابول: } F(0, p) \rightarrow F(0, 2)$$

محور تناظر یا محور محراقی محور y یا $x = 0$ می‌باشد.

خط موج یا خط هادی:



سوال ۲: معادله پارابول $y^2 = -8x$ را در نظر گرفته، رأس، محراق، معادله خط موج، معادله محور تناظر و طول وتر عمودی آنرا دریابید؟

حل سوال: معادله داده شده را با معادله استاندارد مقایسه می‌کنیم.

$$y^2 = -8x \rightarrow y^2 = 4px$$

$$4p = -8 / \div 4 \rightarrow p = -2$$

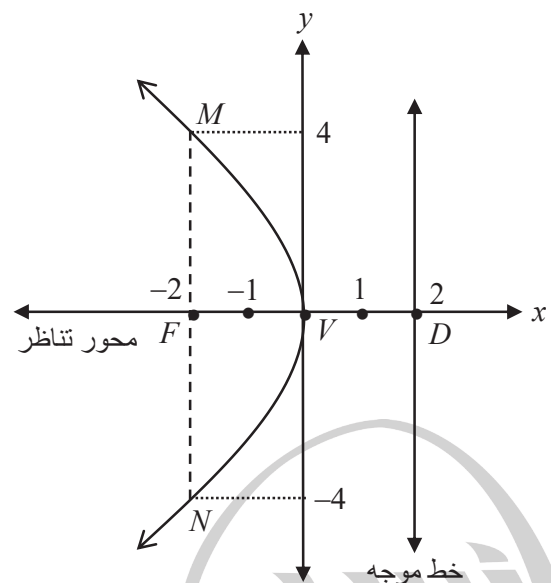
$$\text{راس پارابول: } V(0,0)$$

$$\text{محراق پارابول: } F(p, 0) \rightarrow F(-2, 0)$$

محور تناظر یا محور محراقی محور x یا $y = 0$ می‌باشد.

$$\text{خط موج یا خط هادی: } x = -p \rightarrow x = -(-2) \rightarrow x = +2$$

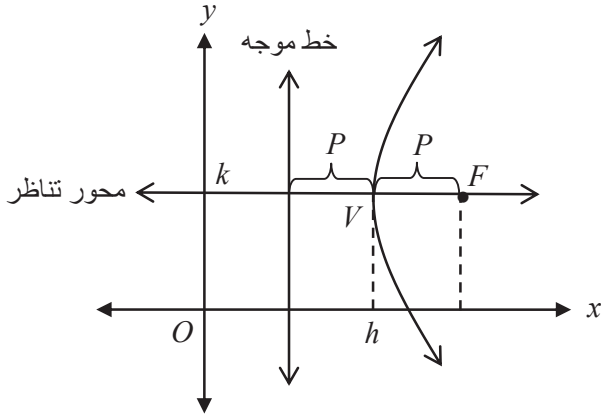
$$\text{طول وتر عمودی: } L = 4|p| \rightarrow L = 4|-2| \rightarrow L = 8$$



هندسه تحلیلی

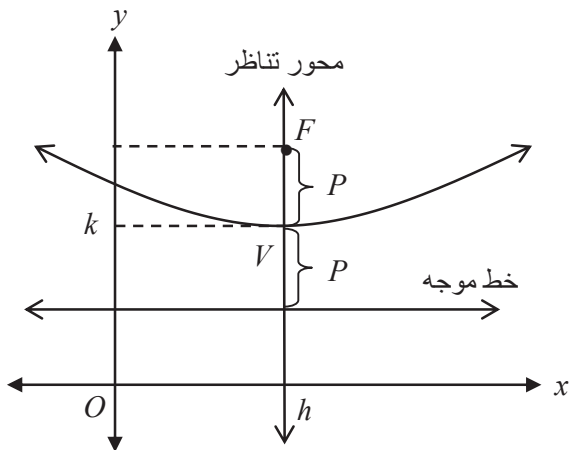
ب: در پارابول عمودی اگر $p < 0$ باشد دهن پارابول به طرف پایین می باشد.

ج: اگر x درجه دوم و y درجه اول باشد پارابول عمودی است. معادله پارابول افقی که رأس آن در مبدا نباشد: قرار شکل معادله این نوع پارابول و مشخصات آن قرار ذیل می باشد.



- 1- معادله پارابول: $(y - k)^2 = 4P(x - h)$
- 2- رأس پارابول: $V(h, k)$
- 3- محراق پارابول: $F(h + p, k)$
- 4- معادله محور تناظر یا محور محراقی: $y = k$
- 5- معادله خط موج: $x = h - p$
- 6- طول وتر عمودی: $L = 4|p|$

معادله پارابول عمودی که رأس آن در مبدا نباشد: قرار شکل معادله این نوع پارابول و مشخصات آن قرار ذیل می باشد.

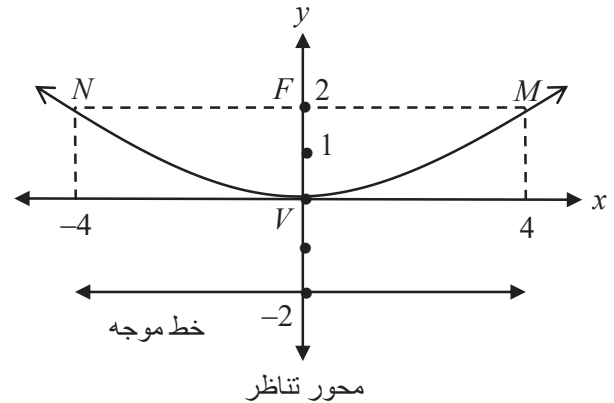


- 1- معادله پارابول: $(x - h)^2 = 4P(y - k)$
- 2- رأس پارابول: $V(h, k)$
- 3- محراق پارابول: $F(h, k + p)$

$$y = -p \rightarrow y = -(2) \rightarrow y = -2$$

طول وتر عمودی:

$$MN = L = 4|p| \rightarrow L = 4|2| \rightarrow L = 8$$



سوال ۴: معادله پارابول $x^2 = -8y$ را در نظر گرفته، رأس، محراق، معادله خط موج، معادله محور تناظر و طول وتر عمودی آنرا دریابید؟

حل سوال: معادله داده شده را با معادله استاندارد مقایسه میکنیم.

$$x^2 = -8y \rightarrow x^2 = 4py$$

$$4p = -8 / \div 4 \rightarrow p = -2$$

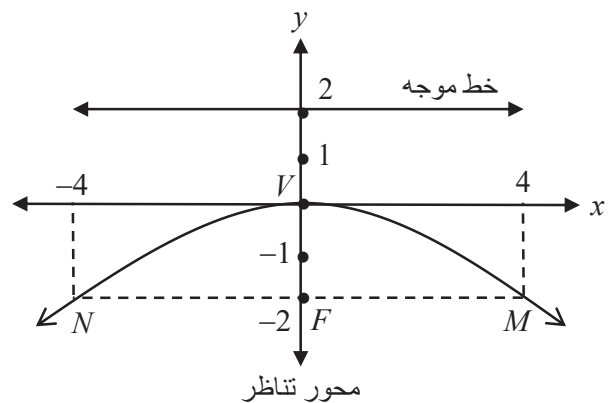
راس پارابول: $V(0, 0)$

محراق پارابول: $F(0, p) \rightarrow F(0, -2)$

محور تناظر یا محور محراقی محور y یا $x = 0$ می باشد.

خط موج یا خط هادی: $y = -p \rightarrow y = -(-2) \rightarrow y = +2$

طول وتر عمودی: $L = 4|p| \rightarrow L = 4|-2| \rightarrow L = 8$



یادداشت:

الف: در پارابول عمودی اگر $p > 0$ باشد دهن پارابول به طرف بالا می باشد.

$$(x-1)^2 = 6y + 53 + 1$$

$$(x-1)^2 = 6y + 54$$

$$(x-1)^2 = 6(y+9)$$

سوال ۸: در پارابول $y^2 + 6y = 7x + 5$ رأس آنرا تعیین کنید؟

حل سوال:

$$y^2 + 6y = 7x + 5$$

$$\frac{6}{2} = 3 \xrightarrow{\text{sqr}} 3^2$$

$$y^2 + 6y + 3^2 - 3^2 = 7x + 5$$

$$(y+3)^2 = 7x + 5 + 9$$

$$(y+3)^2 = 7x + 14$$

$$(y+3)^2 = 7(x+2)$$

$$(y-k)^2 = 4P(x-h)$$

$$h = -2, k = -3$$

$$V(h, k) \rightarrow V(-2, -3)$$

سوال ۹: در پارابول $(y-5)^2 = 3x + 12$ محراق آنرا تعیین کنید؟

حل سوال: پارابول افقی است.

$$(y-5)^2 = 3x + 12$$

$$(y-5)^2 = 3(x+4)$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$h = -4, k = +5$$

$$4p = 3 / \div 4 \rightarrow p = \frac{3}{4}$$

$$F(h, k+p) \rightarrow F\left[-4, (5) + \left(\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$\rightarrow F\left[-4, 5 + \frac{3}{4}\right] \rightarrow F\left[-4, \frac{23}{4}\right]$$

سوال ۱۰: در پارابول $y^2 - 4y - 4x - 8 = 0$ رأس، محراق، خط موجه و محور تناظر آنرا دریابید و گراف آنرا رسم کنید؟

حل سوال: اول معادله را به شکل استاندارد تبدیل میکنیم بعداً مشخصات آنرا دریافت میکنیم و پارابول افقی است.

4- معادله محور تناظر یا محور محراقی: $x = h$

5- معادله خط موجه: $y = k - p$

6- طول وتر عمودی: $L = 4|p|$

یادداشت:

الف: اگر y درجه دوم و x درجه اول باشد پارابول افقی میباشد.
ب: اگر x درجه دوم و y درجه اول باشد پارابول عمودی میباشد.

سوال ۵: معادله پارابول $y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$ را به شکل استاندارد آن تبدیل کنید؟

حل سوال:

$$y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$$

$$y^2 + 4y = 4x - 8$$

$$\frac{4}{2} = 2 \xrightarrow{\text{sqr}} 2^2$$

$$y^2 + 4y + 2^2 - 2^2 = 4x - 8$$

$$(y+2)^2 = 4x - 8 + 4$$

$$(y+2)^2 = 4x - 4$$

$$(y+2)^2 = 4(x-1)$$

سوال ۶: معادله پارابول $y^2 - 3x - 5 = 0$ را به شکل استاندارد آن تبدیل کنید؟

حل سوال:

$$y^2 - 3x - 5 = 0$$

$$y^2 = 3x + 5$$

$$(y-0)^2 = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)$$

سوال ۷: معادله پارابول $x^2 - 2x - 6y - 53 = 0$ را به شکل استاندارد آن تبدیل کنید؟

حل سوال:

$$x^2 - 2x - 6y - 53 = 0$$

$$x^2 - 2x = 6y + 53$$

$$\frac{2}{2} = 1 \xrightarrow{\text{sqr}} 1^2$$

$$x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 = 6y + 53$$

$$(x-1)^2 - 1 = 6y + 53$$

حل سوال:

$$(x-2)^2 = -4(y+3)$$

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$$h = +2, k = -3$$

$$4p = -4 / \div 4 \rightarrow p = -1$$

راس پارابول: $V(h, k) \rightarrow V(2, -3)$

$$F(h, k+p)$$

$$F(2, (-3) + (-1)) \rightarrow F(2, -4)$$

معادله خط موجه پارابول:

$$y = k - p$$

$$y = (-3) - (-1)$$

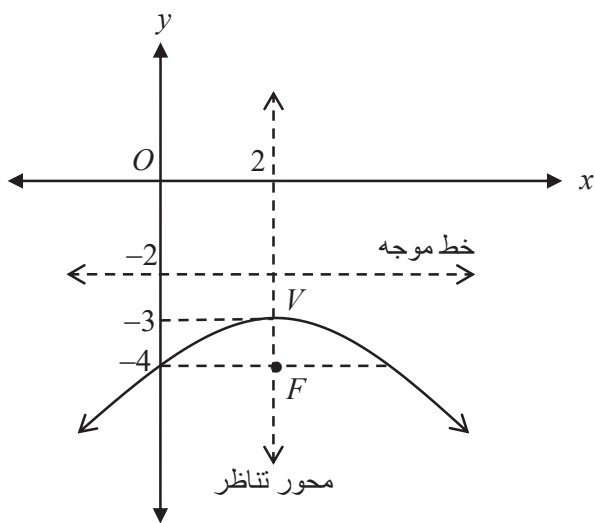
$$\rightarrow y = -3 + 1$$

$$\rightarrow y = -2$$

معادله محور تناظر: $x = h \rightarrow x = 2$

$$L = 4|p| \rightarrow L = 4|-1| \rightarrow L = 4$$

گراف این پارابول قرار ذیل میباشد.



عن المركزیت پارابول: عبارت از نسبت فاصله نقاط از محراق پارابول بر فاصله نقاط از خط موجه پارابول میباشد.
و عن المركزیت پارابول همیشه مساوی به یک میباشد.

$$e = \frac{p}{p} = 1$$

$$y^2 - 4y - 4x - 8 = 0$$

$$y^2 - 4y = 4x + 8$$

$$\frac{4}{2} = 2 \xrightarrow{\text{squr}} 2^2$$

$$y^2 - 4y + 2^2 - 2^2 = 4x + 8$$

$$(y-2)^2 = 4x + 8 + 4$$

$$(y-2)^2 = 4x + 12$$

$$(y-2)^2 = 4(x+3)$$

$$(y-2)^2 = 4(x+3)$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$h = -3, k = +2$$

$$4p = 4 / \div 4 \rightarrow p = 1$$

راس پارابول: $V(h, k) \rightarrow V(-3, 2)$

$$F(h+p, k)$$

$$F(-3+1, 2) \rightarrow F(-2, 2)$$

$$x = h - p$$

$$x = (-3) - (1)$$

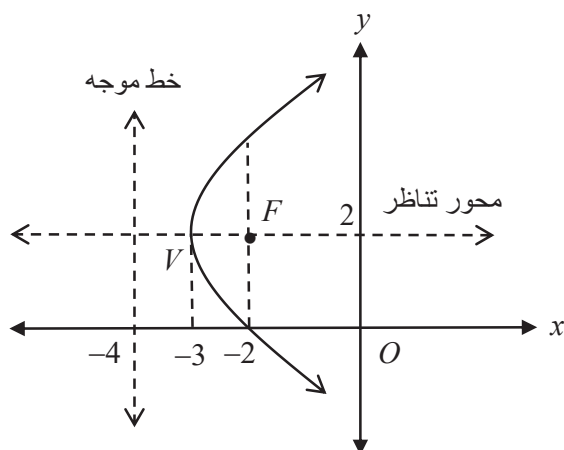
$$\rightarrow x = -3 - 1$$

$$\rightarrow x = -4$$

معادله محور تناظر: $y = k \rightarrow y = 2$

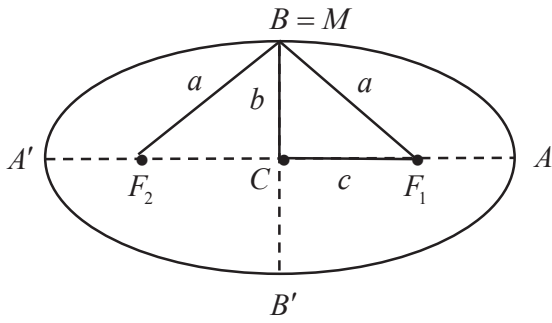
$$L = 4|p| \rightarrow L = 4|1| \rightarrow L = 4$$

گراف این پارابول قرار ذیل میباشد.

سوال ۱۱: در پارابول $(x-2)^2 = -4(y+3)$ تمام مشخصات

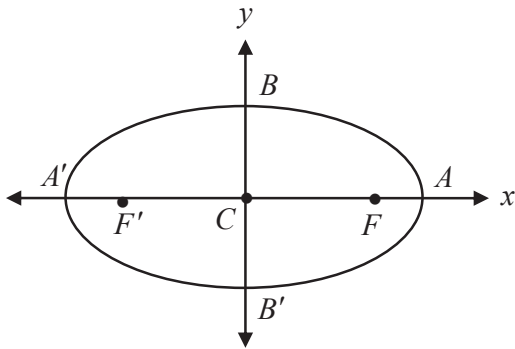
آنها دریابید و گراف آنها رسم نمایید؟

رابطه اساسی بیضوی: رابطه که بین a ، b و c وجود دارد رابطه اساسی بیضوی نامیده میشود و طور ذیل دریافت میشود.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

معادله و مشخصات بیضوی افقی که مرکز آن در مبدأ باشد:



معادله این بیضوی قرار ذیل است:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مختصات مرکز بیضوی یا مختصات مرکز تناظر قرار ذیل است:

$$C(0,0)$$

مختصات انجام های قطر بزرگ یا محور تناظر بزرگ یا محور محراقی قرار ذیل است:

$$A(a,0)$$

$$A'(-a,0)$$

مختصات انجام های قطر کوچک یا محور تناظر کوچک یا محور غیر محراقی قرار ذیل است:

$$B(0,b)$$

$$B'(0,-b)$$

مختصات محراق های بیضوی قرار ذیل است:

$$F(c,0)$$

$$F'(-c,0)$$

معادله محور تناظر بزرگ یا معادله محور محراقی عبارت از محور x یا $y = 0$ میباشد.

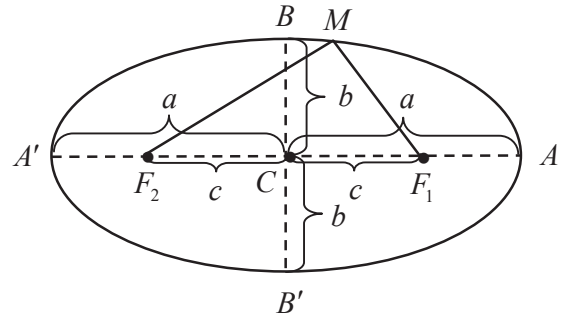
فصل چهارم

بیضوی (Ellipse)

تهیه و ترتیب: انجنیر محمد امین محمدی

تعریف بیضوی: محل هندسی تمام نقاط یک مستوی که مجموع فواصل آنها از دو نقطه مستقر مساوی به یک طول ثابت $2a$ باشد، بیضوی نامیده میشود.

نقاط ثابت محراق های بیضوی و طول ثابت $2a$ بنام قطر اطول یا محور بزرگ بیضوی یاد میشود. قرار شکل بیضوی طور ذیل تعریف میشود.



$$MF_1 + MF_2 = 2a \text{ یا } MF_1 + MF_2 = AA'$$

F_2 و F_1 محراق های بیضوی گفته میشوند.

C مرکز بیضوی گفته میشود.

A و A' راس های قطر بزرگ بیضوی گفته میشوند.

B و B' راس های قطر کوچک بیضوی گفته میشوند.

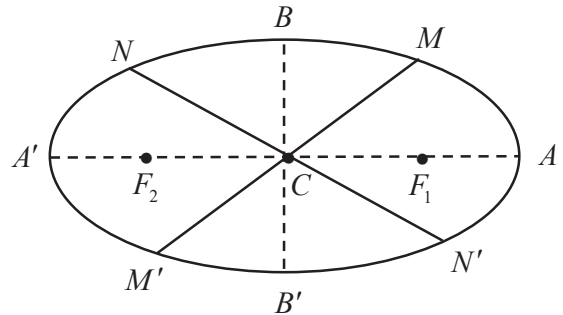
a نصف قطر بزرگ بیضوی گفته میشود.

b نصف قطر کوچک بیضوی گفته میشود.

c نصف فاصله بین محراق ها یا فاصله بین محراق و مرکز میباشد و بنام فاصله محراقی یاد میشود.

قطرهای بیضوی: هر خطی که دو نقطه بیضوی را با هم وصل کند و از مرکز بیضوی عبور کند قطر بیضوی گفته میشود.

قطر اصغر بیضوی بنام محور تناظر کوچک و قطر اطول بیضوی بنام محور تناظر بزرگ بیضوی نامیده میشود.

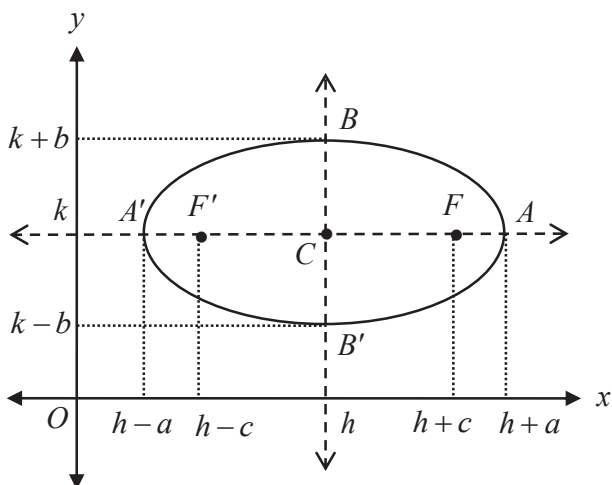


AA' , BB' , MM' , NN' قطر های بیضوی میباشدند.

AA' بزرگترین قطر بیضوی میباشد.

BB' کوچکترین قطر بیضوی میباشد.

معادله بیضوی افقی که مرکز آن در مبدأ وضعیه نباشد.



معادله این بیضوی قرار ذیل است:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

مختصات مرکز بیضوی یا مختصات مرکز تناظر قرار ذیل است:

$$C(h, k)$$

مختصات انجام های قطر بزرگ یا محور تناظر بزرگ یا محور محراقی قرار ذیل است:

$$A(h+a, k)$$

$$A'(h-a, k)$$

مختصات انجام های قطر کوچک یا محور تناظر کوچک یا محور غیر محراقی قرار ذیل است:

$$B(h, k+b)$$

$$B'(h, k-b)$$

مختصات محراق های بیضوی قرار ذیل است:

$$F(h+c, k)$$

$$F'(h-c, k)$$

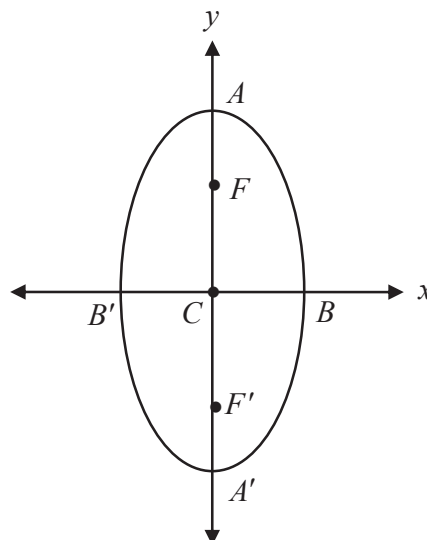
معادله محور تناظر بزرگ یا معادله محور محراقی عبارت از $y = k$ میباشد.

معادله محور تناظر کوچک یا معادله محور غیر محراقی عبارت از $x = h$ میباشد.

معادله محور تناظر کوچک یا معادله محور غیر محراقی عبارت از محور y یا $x = 0$ میباشد.

در بیضوی $a > b$ و $a > c$ میباشد.

معادله و مشخصات بیضوی عمودی که مرکز آن در مبدأ باشد:



معادله این بیضوی قرار ذیل است:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

مختصات مرکز بیضوی یا مختصات مرکز تناظر قرار ذیل است:

$$C(0, 0)$$

مختصات انجام های قطر بزرگ یا محور تناظر بزرگ یا محور محراقی قرار ذیل است:

$$A(0, a)$$

$$A'(0, -a)$$

مختصات انجام های قطر کوچک یا محور تناظر کوچک یا محور غیر محراقی قرار ذیل است:

$$B(b, 0)$$

$$B'(-b, 0)$$

مختصات محراق های بیضوی قرار ذیل است:

$$F(0, c)$$

$$F'(0, -c)$$

معادله محور تناظر بزرگ یا معادله محور محراقی عبارت از محور y یا $x = 0$ میباشد.

معادله محور تناظر کوچک یا معادله محور غیر محراقی عبارت از محور x یا $y = 0$ میباشد.

عن المركزیت بیضوی یا (eccentricity): عن المركزیت عبارت از نسبت فاصله محراقی و نصف قطر بزرگ میباشد، عن المركزیت شکل بیضوی را تعیین میکند و از رابطه ذیل دریافت میشود.

$$e = \frac{c}{a}$$

در بیضوی همیشه $0 < e < 1$ میباشد.

با در نظر داشتن رابطه اساسی و عن المركزیت، برای هر بیضوی رابطه ذیل نیز حاصل میشود.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

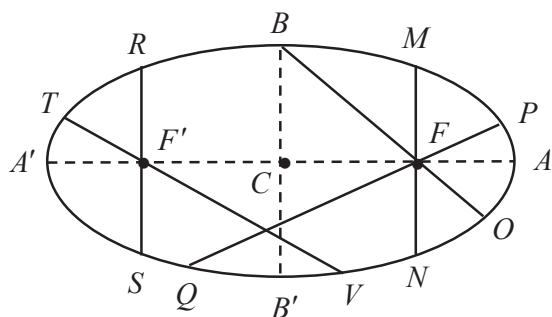
$$e = \frac{c}{a} / \text{sqr} \rightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\rightarrow e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \rightarrow e^2 = \frac{a^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}$$

$$\rightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} / \sqrt{\quad} \rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

وتر بیضوی: هر خطی که دو نقطه محیط بیضوی را با هم وصل کند وتر بیضوی گفته میشود.

وتر عمودی بیضوی: خطی که در محراق بالای محور بزرگ عمود باشد وتر عمودی بیضوی نامیده میشود. قرار شکل:



وت‌های بیضوی میباشند: $AA', BB', TV, RS, BO, MN, PQ$

RS و MN وترهای عمودی بیضوی میباشند.

طول هر دو وتر عمودی با هم مساوی اند. $RS = MN$

طول وتر عمودی بیضوی از رابطه ذیل دریافت میشود.

$$L = \frac{2b^2}{a}$$

یادداشت:

1- اگر مخرج x بزرگ باشد بیضوی افقی میباشد.

2- اگر مخرج y بزرگ باشد بیضوی عمودی میباشد.

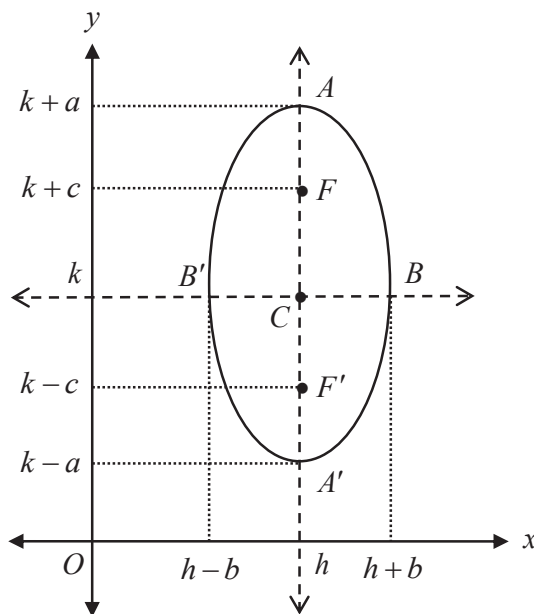
3- مخرج بزرگ مساوی به a^2 میباشد.

4- مخرج کوچک مساوی به b^2 میباشد.

سوال ۱: بیضوی $9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$ را به شکل استاندارد تبدیل کنید؟

حل سوال:

معادله بیضوی عمودی که مرکز آن در مبدأ کمیات وضعیه نباشد.



معادله این بیضوی قرار ذیل است:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

مختصات مرکز بیضوی یا مختصات مرکز تناظر قرار ذیل است:

$$C(h, k)$$

مختصات انجام های قطر بزرگ یا محور تناظر بزرگ یا محور محراقی قرار ذیل است:

$$A(h, k+a)$$

$$A'(h, k-a)$$

مختصات انجام های قطر کوچک یا محور تناظر کوچک یا محور غیر محراقی قرار ذیل است:

$$B(h+b, k)$$

$$B'(h-b, k)$$

مختصات محراق های بیضوی قرار ذیل است:

$$F(h, k+c)$$

$$F'(h, k-c)$$

معادله محور تناظر بزرگ یا معادله محور محراقی عبارت از $x = h$ میباشد.

معادله محور تناظر کوچک یا معادله محور غیر محراقی عبارت از $y = k$ میباشد.

دریافت مساحت بیضوی: برای این منظور از رابطه ذیل استفاده میکنیم.

$$A = \pi ab$$

دریافت محیط بیضوی: برای این منظور از رابطه ذیل استفاده میکنیم.

$$C = \pi \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

بیضوی فوق عمودی است بخاطریکه مخرج y بزرگ است.
سوال ۳: بیضوی $4x^2 + 9y^2 = 144$ را به شکل استاندارد تبدیل کنید؟
حل سوال:

$$4x^2 + 9y^2 = 144 / \div 144$$

$$\frac{4x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

بیضوی افقی است بخاطریکه مخرج x بزرگ است.
سوال ۴: بیضوی $25x^2 + 9y^2 = 900$ را به شکل استاندارد تبدیل کنید؟
حل سوال:

$$25x^2 + 9y^2 = 900$$

$$25x^2 + 9y^2 = 900 / \div 900$$

$$\frac{25x^2}{900} + \frac{9y^2}{900} = \frac{900}{900}$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

بیضوی فوق عمودی است بخاطریکه مخرج y بزرگ است.
سوال ۵: تمام مشخصات بیضوی $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ را دریافت نموده و گراف آنرا رسم نمایید؟
حل سوال:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$a^2 = 25 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 16 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = 4$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 25 - 16 \rightarrow c^2 = 9 / \sqrt{\quad} \rightarrow c = 3$$

مختصات مرکز بیضوی یا مختصات مرکز تناظر قرار ذیل است:
 $C(0,0)$

مختصات انجام های قطر بزرگ یا محور تناظر بزرگ یا محور محراقی قرار ذیل است:

$$A(a,0) \rightarrow A(5,0)$$

$$A'(-a,0) \rightarrow A'(-5,0)$$

مختصات انجام های قطر کوچک یا محور تناظر کوچک یا محور غیر محراقی قرار ذیل است:

$$B(0,b) \rightarrow B(0,4)$$

$$B'(0,-b) \rightarrow B'(0,-4)$$

مختصات محراق های بیضوی قرار ذیل است:

$$9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$$

$$9x^2 - 36x + 25y^2 - 150y + 36 = 0$$

$$9(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 6y) + 36 = 0$$

$$\frac{4}{2} = 2 \xrightarrow{\text{sqr}} 2^2, \frac{6}{2} = 3 \xrightarrow{\text{sqr}} 3^2$$

$$9[x^2 - 4x + 2^2 - 2^2] + 25[y^2 - 6y + 3^2 - 3^2] + 36 = 0$$

$$9[(x-2)^2 - 4] + 25[(y-3)^2 - 9] + 36 = 0$$

$$9(x-2)^2 - 9 \cdot 4 + 25(y-3)^2 - 25 \cdot 9 + 36 = 0$$

$$9(x-2)^2 - 36 + 25(y-3)^2 - 225 + 36 = 0$$

$$9(x-2)^2 + 25(y-3)^2 - 225 - 36 + 36 = 0$$

$$9(x-2)^2 + 25(y-3)^2 - 225 = 0$$

$$9(x-2)^2 + 25(y-3)^2 = 225 / \div 225$$

$$\frac{9(x-2)^2}{225} + \frac{25(y-3)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

بیضوی فوق افقی است بخاطریکه مخرج x بزرگ است.
سوال ۲: بیضوی $9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$ را به شکل استاندارد تبدیل کنید؟
حل سوال:

$$16x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84 = 0$$

$$16x^2 + 96x + 4y^2 - 8y + 84 = 0$$

$$16(x^2 + 6x) + 4(y^2 - 2y) + 84 = 0$$

$$\frac{6}{2} = 3 \xrightarrow{\text{sqr}} 3^2, \frac{2}{2} = 1 \xrightarrow{\text{sqr}} 1^2$$

$$16(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) + 4(y^2 - 2y + 1^2 - 1^2) + 84 = 0$$

$$16[(x+3)^2 - 9] + 4[(y-1)^2 - 1] + 84 = 0$$

$$16(x+3)^2 - 16 \cdot 9 + 4(y-1)^2 - 4 \cdot 1 + 84 = 0$$

$$16(x+3)^2 - 144 + 4(y-1)^2 - 4 + 84 = 0$$

$$16(x+3)^2 + 4(y-1)^2 - 144 - 1 + 84 = 0$$

$$16(x+3)^2 + 4(y-1)^2 - 64 = 0$$

$$16(x+3)^2 + 4(y-1)^2 = 64 / \div 64$$

$$\frac{16(x+3)^2}{64} + \frac{4(y-1)^2}{64} = \frac{64}{64}$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

مختصات محراق های بیضوی قرار ذیل است:

$$F(0, c) \rightarrow F(0, 8)$$

$$F'(0, -c) \rightarrow F'(0, -8)$$

معادله محور تناظر بزرگ یا معادله محور محراقی عبارت از محور y یا $x=0$ میباشد.

معادله محور تناظر کوچک یا معادله محور غیر محراقی عبارت از محور x یا $y=0$ میباشد.

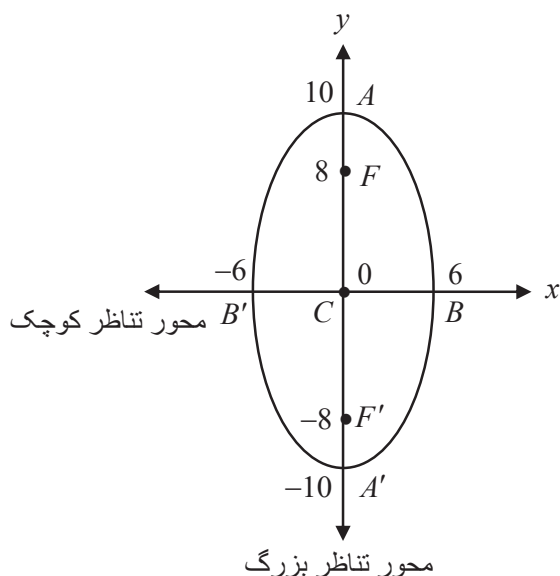
طول وتر عمودی:

$$L = \frac{2b^2}{a} \rightarrow L = \frac{2 \cdot 6^2}{10} \rightarrow L = \frac{2 \cdot 36}{10}$$

$$L = \frac{72}{10} \rightarrow L = 7.2$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{8}{10} \rightarrow e = 0.8$$

عن مرکزیت بیضوی:



محور تناظر بزرگ

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

سوال ۷: تمام مشخصات بیضوی

را دریافته و گراف آنرا رسم نمایید؟

حل سوال: بیضوی افقی است بخاطریکه مخرج x بزرگ است.

مخرج بزرگ مساوی به a^2 و مخرج کوچک مساوی به b^2 میباشد.

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$h = +2, k = +3$$

$$a^2 = 25 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 9 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = 3$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 25 - 9 \rightarrow c^2 = 16 / \sqrt{\quad} \rightarrow c = 4$$

مختصات مرکز بیضوی یا مختصات مرکز تناظر قرار ذیل است:

$$F(c, 0) \rightarrow F(3, 0)$$

$$F'(-c, 0) \rightarrow F'(-3, 0)$$

معادله محور تناظر بزرگ یا معادله محور محراقی عبارت از محور x یا $y=0$ میباشد.

معادله محور تناظر کوچک یا معادله محور غیر محراقی عبارت از محور y یا $x=0$ میباشد.

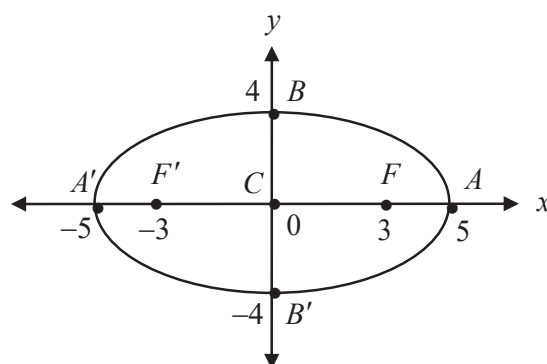
طول وتر عمودی قرار ذیل است:

$$L = \frac{2b^2}{a} \rightarrow L = \frac{2 \cdot 4^2}{5} \rightarrow L = \frac{2 \cdot 16}{5}$$

$$L = \frac{32}{5} \rightarrow L = 6.4$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{3}{5} \rightarrow e = 0.6$$

عن مرکزیت بیضوی:



سوال ۶: تمام مشخصات بیضوی $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$ را دریافته

نموده و گراف آنرا رسم نمایید؟

حل سوال:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

$$a^2 = 100 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 10$$

$$b^2 = 36 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = 6$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 100 - 36 \rightarrow c^2 = 64 / \sqrt{\quad} \rightarrow c = 8$$

مختصات مرکز بیضوی یا مختصات مرکز تناظر قرار ذیل است:

$$C(0, 0)$$

مختصات انجام های قطر بزرگ یا محور تناظر بزرگ یا محور محراقی قرار ذیل است:

$$A(0, a) \rightarrow A(0, 10)$$

$$A'(0, -a) \rightarrow A'(0, -10)$$

مختصات انجام های قطر کوچک یا محور تناظر کوچک یا محور غیر محراقی قرار ذیل است:

$$B(b, 0) \rightarrow B(6, 0)$$

$$B'(-b, 0) \rightarrow B'(-6, 0)$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 16 - 4 \rightarrow c^2 = 12 / \sqrt{}$$

$$c = \sqrt{12} \rightarrow c = \sqrt{4 \cdot 3} \rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$c = 2 \cdot 1.7 \rightarrow c = 3.4$$

مختصات مرکز بیضوی یا مختصات مرکز تناظر قرار ذیل است:

$$C(h, k) \rightarrow C(-3, +1)$$

مختصات انجام های قطر بزرگ یا محور تناظر بزرگ یا محور محراقی قرار ذیل است:

$$A(h, k + a) \rightarrow A(-3, 1 + 4) \rightarrow A(-3, 5)$$

$$A'(h, k - a) \rightarrow A'(-3, 1 - 4) \rightarrow A'(-3, -3)$$

مختصات انجام های قطر کوچک یا محور تناظر کوچک یا محور غیر محراقی قرار ذیل است:

$$B(h + b, k) \rightarrow B(-3 + 2, 1) \rightarrow B(-1, 1)$$

$$B'(h - b, k) \rightarrow B'(-3 - 2, 1) \rightarrow B'(-5, 1)$$

مختصات محراق های بیضوی قرار ذیل است:

$$F(h, k + c) \rightarrow F(-3, 1 + 2\sqrt{3})$$

$$F(-3, 1 + 3.4) \rightarrow F(-3, 4.4)$$

$$F'(h, k - c) \rightarrow F'(-3, 1 - 2\sqrt{3})$$

$$F'(-3, 1 - 3.4) \rightarrow F'(-3, -2.4)$$

معادله محور تناظر بزرگ یا معادله محور محراقی عبارت از $x = h \rightarrow x = -3$ میباشد.

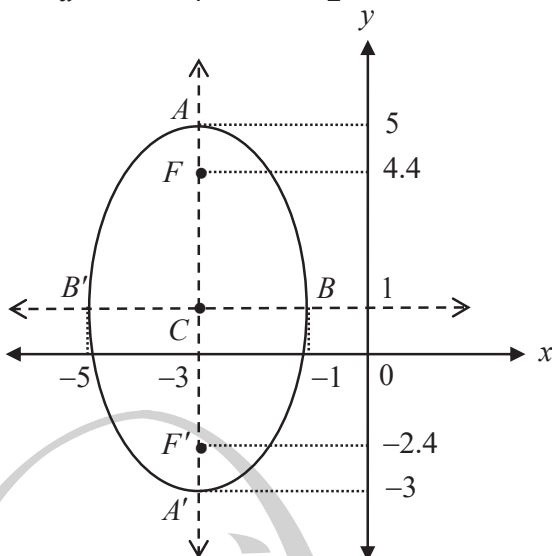
معادله محور تناظر کوچک یا معادله محور غیر محراقی عبارت از $y = k \rightarrow y = 1$ میباشد.

طول وتر عمودی:

$$L = \frac{2b^2}{a} \rightarrow L = \frac{2(2)^2}{4} \rightarrow L = \frac{8}{4} \rightarrow L = 2$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{2\sqrt{3}}{4} \rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

عن مرکزیت بیضوی:



$$C(h, k) \rightarrow C(2, 3)$$

مختصات انجام های قطر بزرگ یا محور تناظر بزرگ یا محور محراقی قرار ذیل است:

$$A(h + a, k) \rightarrow A(2 + 5, 3) \rightarrow A(7, 3)$$

$$A'(h - a, k) \rightarrow A'(2 - 5, 3) \rightarrow A'(-3, 3)$$

مختصات انجام های قطر کوچک یا محور تناظر کوچک یا محور غیر محراقی قرار ذیل است:

$$B(h, k + b) \rightarrow B(2, 3 + 3) \rightarrow B(2, 6)$$

$$B'(h, k - b) \rightarrow B'(2, 3 - 3) \rightarrow B'(2, 0)$$

مختصات محراق های بیضوی قرار ذیل است:

$$F(h + c, k) \rightarrow F(2 + 4, 3) \rightarrow F(6, 3)$$

$$F'(h - c, k) \rightarrow F'(2 - 4, 3) \rightarrow F'(-2, 3)$$

معادله محور تناظر بزرگ یا معادله محور محراقی عبارت از $y = k \rightarrow y = 3$ میباشد.

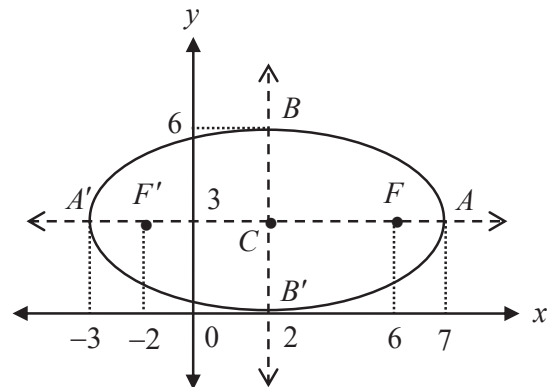
معادله محور تناظر کوچک یا معادله محور غیر محراقی عبارت از $x = h \rightarrow x = 2$ میباشد.

طول وتر عمودی:

$$L = \frac{2b^2}{a} \rightarrow L = \frac{2 \cdot 3^2}{5} \rightarrow L = \frac{18}{5} \rightarrow L = 3.6$$

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{4}{5} \rightarrow e = 0.8$$

عن مرکزیت بیضوی:



سوال ۸: در بیضوی $\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ تمام

مشخصات آنرا دریافته و گراف آنرا رسم نمایید؟

حل سوال: بیضوی عمودی است بخاطریکه مخرج y بزرگ است و مخرج بزرگ a^2 و مخرج کوچک b^2 میباشد.

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

$$h = -3, k = +1$$

$$a^2 = 16 / \sqrt{} \rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 4 / \sqrt{} \rightarrow b = 2$$

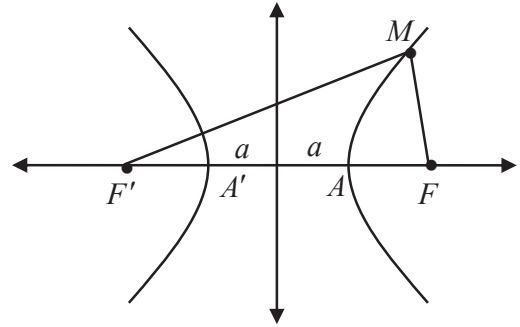
فصل پنجم

هایپر بول (Hyperbola)

تهیه و ترتیب: انجنیر محمد امین محمدی

تعریف هایپر بول: محل هندسی نقاطی که تفاضل فواصل آنها از دو نقطه ثابت مساوی به یک طول ثابت $2a$ باشد، هایپر بول نامیده میشود.

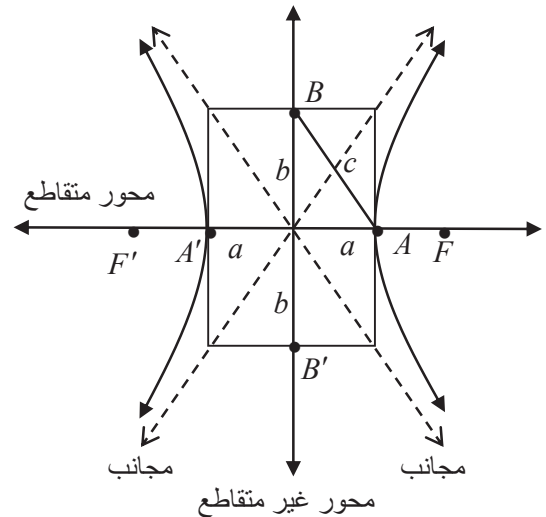
نقاط ثابت محراقهای هایپر بول و طول ثابت $2a$ فاصله بین دو رأس هایپر بول و یا طول محور متقاطع میباشد. قرار شکل هایپر بول طور ذیل تعریف میشود.



$$|MF - MF'| = 2a \text{ یا } |MF - MF'| = AA'$$

محورهای هایپر بول: هر هایپر بول دارای دو محور تناظر میباشد. خطی که از رأس های هایپر بول عبور میکند، بنام محور متقاطع یا محور محراقی هایپر بول یاد میشود.

خطی که در مرکز بالای محور متقاطع عمود باشد، بنام محور مزدوج یا محور غیر متقاطع یا محور غیر محراقی یاد میشود.



طول محور متقاطع $2a$ میباشد. یعنی: $AA' = 2a$

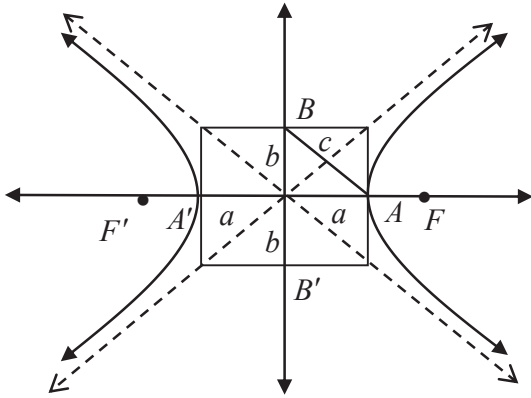
طول محور مزدوج $2b$ میباشد. یعنی: $BB' = 2b$

فاصله بین دو محراق به $2c$ نشان داده میشود. یعنی $FF' = 2c$

در هر هایپر بول $c > a$ و $c > b$ میباشد. اما امکان دارد که $a = b$ ، یا $a > b$ و یا $a < b$ باشد.

رابطه اساسی هایپر بول: در هر هایپر بول بین a ، b و c رابطه $c^2 = a^2 + b^2$ وجود دارد که بنام رابطه اساسی هایپر بول یاد میشود.

در هایپر بولی که $a = b$ باشد بنام هایپر بول متساوی القطرین یاد میشود. مانند هایپر بول ذیل:



$$a = b \neq c$$

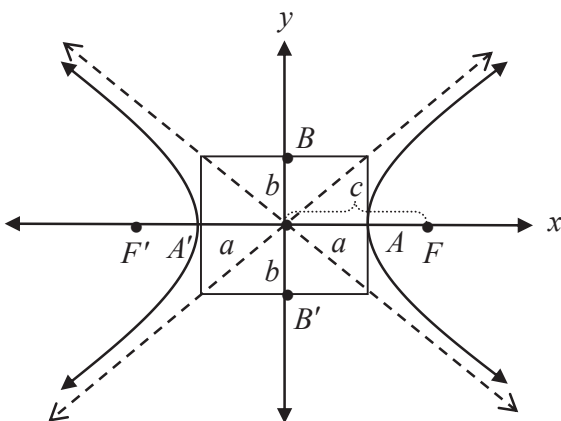
عن المرکزیت هایپر بول: چون در هایپر بول $c > a$ است بناءً در هایپر بول $e > 1$ میباشد، و عن المرکزیت هایپر بول از روابط ذیل دریافت میشود.

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

معادلات هایپر بول: هایپر بول نیز چهار حالت دارد.

الف: معادله و مشخصات هایپر بول افقی که مرکز آن در مبداء کمیات وضعیه باشد:



معادله این نوع هایپر بول قرار ذیل است:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

مختصات مرکز هایپر بول:

$$C(0,0)$$

مختصات راس های حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$A(a,0)$$

$$A'(-a,0)$$

مختصات راس های غیر حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$B(0,b)$$

$$B'(0,-b)$$

مختصات محراق های هایپر بول قرار ذیل است:

$$F(c,0)$$

$$F'(-c,0)$$

معادله محور تناظر متقاطع یا محور محراقی عبارت از محور x یا $y = 0$ میباشد.معادله محور تناظر غیر متقاطع یا محور غیر محراقی عبارت از محور y یا $x = 0$ میباشد.

معادلات مجانب های هایپر بول قرار ذیل است:

$$y = +\frac{b}{a}x$$

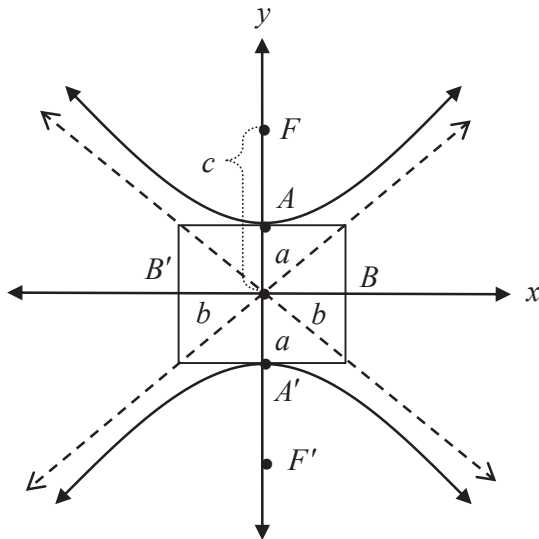
$$y = -\frac{b}{a}x$$

معادلات خطوط موجه یا هادی هایپر بول قرار ذیل است:

$$x = +\frac{a}{e}$$

$$x = -\frac{a}{e}$$

ب: معادله و مشخصات هایپر بول عمودی که مرکز آن در مبداء کمیات وضعیه باشد:



معادله این نوع هایپر بول قرار ذیل است:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

مختصات مرکز هایپر بول:

$$C(0,0)$$

مختصات راس های حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$A(0,a)$$

$$A'(0,-a)$$

مختصات راس های غیر حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$B(b,0)$$

$$B'(-b,0)$$

مختصات محراق های هایپر بول قرار ذیل است:

$$F(0,c)$$

$$F'(0,-c)$$

معادله محور تناظر متقاطع یا محور محراقی عبارت از محور y یا $x = 0$ میباشد.معادله محور تناظر غیر متقاطع یا محور غیر محراقی عبارت از محور x یا $y = 0$ میباشد.

معادلات مجانب های هایپر بول قرار ذیل است:

$$F(h+c, k)$$

$$F'(h-c, k)$$

معادله محور تناظر متقاطع یا محور محراقی عبارت از $y = k$ میباشد.

معادله محور تناظر غیر متقاطع یا محور غیر محراقی عبارت از $x = h$ میباشد.

معادلات مجانب های هایپر بول قرار ذیل است:

$$y - k = +\frac{b}{a}(x - h)$$

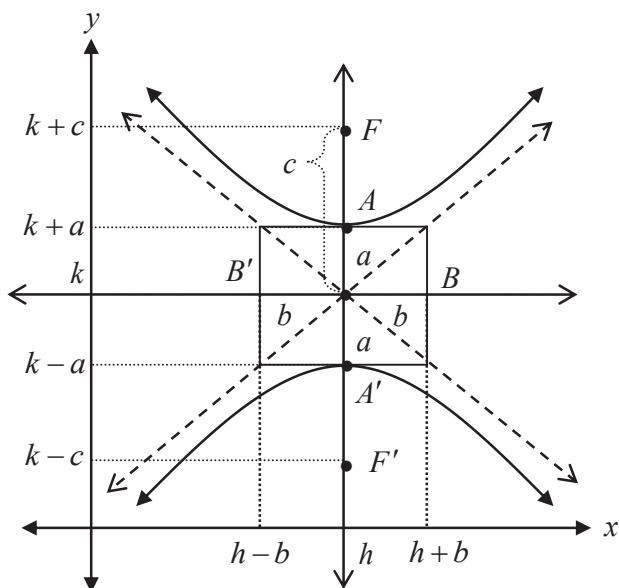
$$y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$$

معادلات خطوط موجی یا هادی هایپر بول قرار ذیل است:

$$x = h + \frac{a}{e}$$

$$x = h - \frac{a}{e}$$

د: معادله و مشخصات هایپر بول عمودی که مرکز آن در مبدا کمیات وضعیه باشد:



معادله این نوع هایپر بول قرار ذیل است:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

مختصات مرکز هایپر بول:

$$C(h, k)$$

مختصات راس های حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$y = +\frac{a}{b}x$$

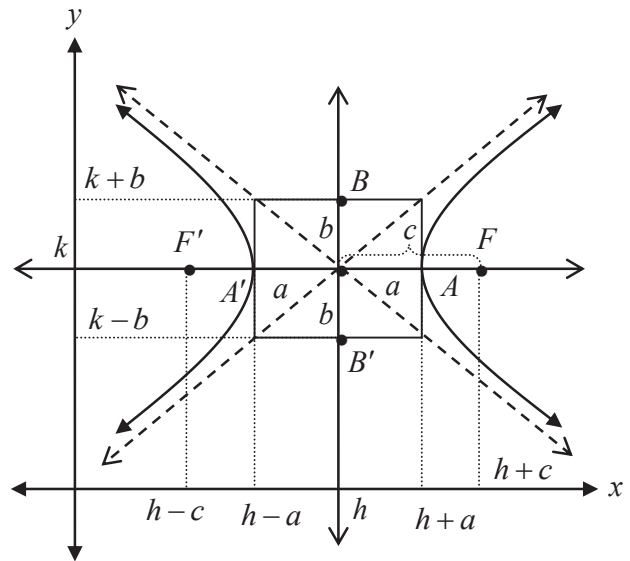
$$y = -\frac{a}{b}x$$

معادلات خطوط موجی یا هادی هایپر بول قرار ذیل است:

$$y = +\frac{a}{e}$$

$$y = -\frac{a}{e}$$

ج: معادله و مشخصات هایپر بول افقی که مرکز آن در مبدا کمیات وضعیه باشد:



معادله این نوع هایپر بول قرار ذیل است:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

مختصات مرکز هایپر بول:

$$C(h, k)$$

مختصات راس های حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$A(h+a, k)$$

$$A'(h-a, k)$$

مختصات راس های غیر حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$B(h, k+b)$$

$$B'(h, k-b)$$

مختصات محراق های هایپر بول قرار ذیل است:

$$a^2 = 25 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 8 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = \sqrt{8}$$

$$b = \sqrt{4 \cdot 2} \rightarrow b = 2\sqrt{2}$$

$$b = 2 \cdot 1.4 \rightarrow b = 2.8$$

هایپربول افقی است بخاطریکه کسر مثبت مربوط x است.

سوال ۲: معادله هایپربول $9x^2 - y^2 = 81$ را به شکل استاندارد تبدیل نموده و نوعیت آنرا دریابید؟

حل سوال:

$$9x^2 - y^2 = 81 / \div 81$$

$$\frac{9x^2}{81} - \frac{y^2}{81} = \frac{81}{81} \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{81} = 1$$

$$a^2 = 9 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 81 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = 9$$

هایپربول افقی است بخاطریکه کسر مثبت مربوط x است.

سوال ۳: معادله هایپربول $x^2 - y^2 = 49$ را به شکل استاندارد تبدیل نموده و نوعیت آنرا دریابید؟

حل سوال:

$$x^2 - y^2 = 49 / \div 49$$

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{49} = \frac{49}{49} \rightarrow \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{49} = 1$$

$$a^2 = 49 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 7$$

$$b^2 = 49 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = 7$$

هایپربول افقی است بخاطریکه کسر مثبت مربوط x است.

سوال ۴: معادله هایپربول $x^2 - y^2 = 49$ را به شکل استاندارد تبدیل نموده و نوعیت آنرا دریابید؟

حل سوال:

$$6y^2 - 2x^2 = 24 / \div 24$$

$$\frac{6y^2}{24} - \frac{2x^2}{24} = \frac{24}{24} \rightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$

$$a^2 = 4 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 2$$

$$b^2 = 12 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = \sqrt{12}$$

$$b = \sqrt{4 \cdot 3} \rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

هایپربول عمودی است بخاطریکه کسر مثبت مربوط y است.

$$A(h, k + a)$$

$$A'(h, k - a)$$

مختصات راس های غیر حقیقی هایپربول قرار ذیل است:

$$B(h + b, k)$$

$$B'(h - b, k)$$

مختصات محراق های هایپربول قرار ذیل است:

$$F(h, k + c)$$

$$F'(h, k - c)$$

معادله محور تناظر متقاطع یا محور محراقی عبارت از $x = h$ میباشد.

معادله محور تناظر غیر متقاطع یا محور غیر محراقی عبارت از $y = k$ میباشد.

معادلات مجانب های هایپربول قرار ذیل است:

$$y - k = +\frac{a}{b}(x - h)$$

$$y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$$

معادلات خطوط موجه:

$$y = k + \frac{a}{e}$$

$$y = k - \frac{a}{e}$$

یادداشت:

1- در معادله استاندارد هایپربول مخرج کسر مثبت همیشه مساوی به a^2 میباشد.

2- در معادله استاندارد هایپربول مخرج کسر منفی همیشه مساوی به b^2 میباشد.

3- اگر کسر مثبت مربوط x باشد هایپربول افقی میباشد.

4- اگر کسر مثبت مربوط y باشد هایپربول عمودی میباشد.

سوال ۱: معادله هایپربول $8x^2 - 25y^2 = 200$ را به شکل استاندارد تبدیل نموده و نوعیت آنرا دریابید؟

حل سوال:

$$8x^2 - 25y^2 = 200 / \div 200$$

$$\frac{8x^2}{200} - \frac{25y^2}{200} = \frac{200}{200} \rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{8} = 1$$

$$a^2 = 36 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 6$$

$$b^2 = 64 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = 8$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 36 + 64$$

$$c^2 = 100 / \sqrt{\quad} \rightarrow c = 10$$

مختصات مرکز هایپر بول:

$$C(0,0)$$

مختصات راس های حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$A(a,0) \rightarrow A(6,0)$$

$$A'(-a,0) \rightarrow A'(-6,0)$$

مختصات راس های غیر حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$B(0,b) \rightarrow B(0,8)$$

$$B'(0,-b) \rightarrow B'(0,-8)$$

مختصات محراق های هایپر بول قرار ذیل است:

$$F(c,0) \rightarrow F(10,0)$$

$$F'(-c,0) \rightarrow F'(-10,0)$$

معادله محور تناظر متقاطع یا محور محراقی عبارت از محور x یا $y = 0$ میباشد.

معادله محور تناظر غیر متقاطع یا محور غیر محراقی عبارت از محور y یا $x = 0$ میباشد.

معادلات مجانب های هایپر بول قرار ذیل است:

$$y = +\frac{b}{a}x$$

$$y = +\frac{8}{6}x / \cdot 6 \rightarrow 6y = 8x$$

$$-8x + 6y = 0 / \cdot (-1)$$

$$8x - 6y = 0$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{8}{6}x / \cdot 6$$

$$6y = -8x$$

$$+8x + 6y = 0$$

$$8x + 6y = 0$$

سوال ۵: معادله هایپر بول $x^2 - y^2 = 49$ را به شکل استاندارد تبدیل نموده و نوعیت آنرا دریابید؟

حل سوال:

$$y^2 - x^2 = 36 / \div 36$$

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{36} = 1$$

$$a^2 = 36 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 6$$

$$b^2 = 36 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = 6$$

هایپر بول عمودی است بخاطریکه کسر مثبت مربوط y است.

سوال ۶: معادله هایپر بول $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ را به شکل استاندارد تبدیل نمایید؟

حل سوال:

$$2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$$

$$2(x^2 - 4x) - 3(y^2 + 6y) - 31 = 0$$

$$\frac{4}{2} = 2 \xrightarrow{sqr} 2^2, \quad \frac{6}{2} = 3 \xrightarrow{sqr} 3^2$$

$$2(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 3(y^2 + 6y + 3^2 - 3^2) - 31 = 0$$

$$2[(x-2)^2 - 4] - 3[(y+3)^2 - 9] - 31 = 0$$

$$2(x-2)^2 - 8 - 3(y+3)^2 + 27 - 31 = 0$$

$$2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 - 8 + 27 - 31 = 0$$

$$2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 - 12 = 0$$

$$2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 = 12 / \div 12$$

$$\frac{2(x-2)^2}{12} - \frac{3(y+3)^2}{12} = \frac{12}{12}$$

$$\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

هایپر بول افقی است بخاطریکه کسر مثبت مربوط x است.

سوال ۷: تمام مشخصات هایپر بول $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ را دریافت

نموده و گراف آنرا رسم نمایید؟

حل سوال: هایپر بول افقی است بخاطریکه کسر مثبت مربوط x است.

$$y = +\frac{a}{b}x$$

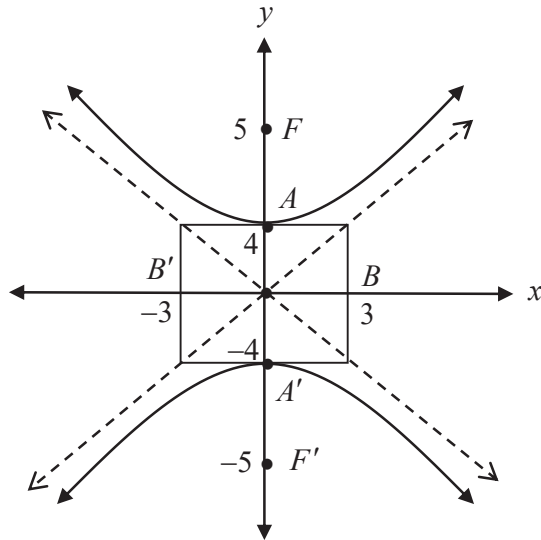
$$y = \frac{4}{3}x / \cdot 3 \rightarrow 3y = 4x$$

$$-4x + 3y = 0 / \cdot (-1) \rightarrow 4x - 3y = 0$$

$$y = -\frac{a}{b}x$$

$$y = -\frac{4}{3}x / \cdot 3 \rightarrow 3y = -4x$$

$$+4x + 3y = 0 \rightarrow 4x + 3y = 0$$



$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

سوال ۹: تمام مشخصات هایپر بول را دریافت نموده و گراف آنرا رسم نمایید؟

حل سوال: هایپر بول افقی است بخاطریکه کسر مثبت مربوط به x میباشد.

$$h = +2, k = -3$$

$$a^2 = 9 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 16 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 9 + 16$$

$$c^2 = 25 / \sqrt{\quad} \rightarrow c = 5$$

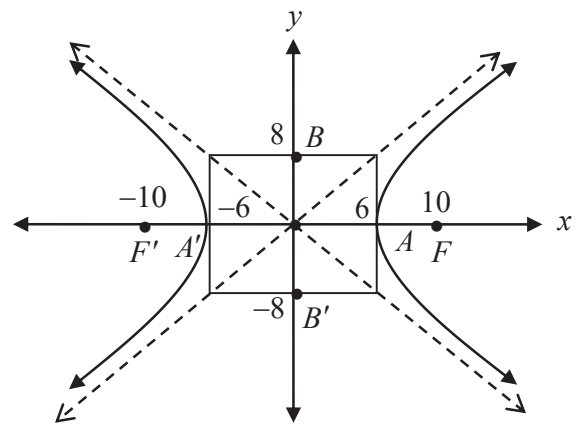
مختصات مرکز هایپر بول:

$$C(h, k) \rightarrow C(+2, -3)$$

مختصات راس های حقیقی هایپر بول قرار ندهد:

$$A(h+a, k) \rightarrow A(2+3, -3) \rightarrow A(5, -3)$$

$$A'(h-a, k) \rightarrow A'(2-3, -3) \rightarrow A'(-1, -3)$$



$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

سوال ۸: تمام مشخصات هایپر بول را دریافت نموده و گراف آنرا رسم نمایید؟

حل سوال: هایپر بول عمودی است بخاطریکه کسر مثبت مربوط به y است.

$$a^2 = 16 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 16 + 9$$

$$c^2 = 25 / \sqrt{\quad} \rightarrow c = 5$$

مختصات مرکز هایپر بول:

$$C(0, 0)$$

مختصات راس های حقیقی هایپر بول قرار ندهد:

$$A(0, a) \rightarrow A(0, 4)$$

$$A'(0, -a) \rightarrow A'(0, -4)$$

مختصات راس های غیر حقیقی هایپر بول قرار ندهد:

$$B(b, 0) \rightarrow B(3, 0)$$

$$B'(-b, 0) \rightarrow B'(-3, 0)$$

مختصات محراق های هایپر بول قرار ندهد:

$$F(0, c) \rightarrow F(0, 5)$$

$$F'(0, -c) \rightarrow F'(0, -5)$$

معادله محور تناظر متقاطع با محور محراقی عبارت از محور y یا $x = 0$ میباشد.

معادله محور تناظر غیر متقاطع با محور غیر محراقی عبارت از محور x یا $y = 0$ میباشد.

معادلات مجانب های هایپر بول قرار ندهد:

حل سوال: هایپر بول عمودی است بخاطر یکه کسر مثبت مربوط به y میباشد.

$$h = -3, k = +2$$

$$a^2 = 9 / \sqrt{\quad} \rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 16 / \sqrt{\quad} \rightarrow b = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 9 + 16$$

$$c^2 = 25 / \sqrt{\quad} \rightarrow c = 5$$

مختصات مرکز هایپر بول:

$$C(h, k) \rightarrow C(-3, 2)$$

مختصات راس های حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$A(h, k + a) \rightarrow A(-3, 2 + 3) \rightarrow A(-3, 5)$$

$$A'(h, k - a) \rightarrow A'(-3, 2 - 3) \rightarrow A'(-3, -1)$$

مختصات راس های غیر حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$B(h + b, k) \rightarrow B(-3 + 4, 2) \rightarrow B(+1, 2)$$

$$B'(h - b, k) \rightarrow B'(-3 - 4, 2) \rightarrow B'(-7, 2)$$

مختصات محراق های هایپر بول قرار ذیل است:

$$F(h, k + c) \rightarrow F(-3, 2 + 5) \rightarrow F(-3, 7)$$

$$F'(h, k - c) \rightarrow F'(-3, 2 - 5) \rightarrow F'(-3, -3)$$

معادله محور تناظر متقاطع یا محور محراقی عبارت از $x = h \rightarrow x = -3$ میباشد.

معادله محور تناظر غیر متقاطع یا محور غیر محراقی عبارت از $y = k \rightarrow y = 2$ میباشد.

معادلات مجانب های هایپر بول قرار ذیل است:

$$y - k = +\frac{a}{b}(x - h)$$

$$y - 2 = +\frac{3}{4}(x - (-3))$$

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x + 3) / \div 4$$

$$4y - 8 = -3(x + 3)$$

$$4y - 8 = -3x - 9$$

$$4y - 8 + 3x + 9 = 0$$

$$3x + 4y + 1 = 0$$

مختصات راس های غیر حقیقی هایپر بول قرار ذیل است:

$$B(h, k + b) \rightarrow B(2, -3 + 4) \rightarrow B(2, 1)$$

$$B'(h, k - b) \rightarrow B'(2, -3 - 4) \rightarrow B'(2, -7)$$

مختصات محراق های هایپر بول قرار ذیل است:

$$F(h + c, k) \rightarrow F(2 + 5, -3) \rightarrow F(7, -3)$$

$$F'(h - c, k) \rightarrow F'(2 - 5, -3) \rightarrow F'(-3, -3)$$

معادله محور تناظر متقاطع یا محور محراقی عبارت از $y = k \rightarrow y = -3$ میباشد.

معادله محور تناظر غیر متقاطع یا محور غیر محراقی عبارت از $x = h \rightarrow x = 2$ میباشد.

معادلات مجانب های هایپر بول قرار ذیل است:

$$y - k = +\frac{b}{a}(x - h)$$

$$y - (-3) = +\frac{4}{3}(x - (+2)) \rightarrow y + 3 = \frac{4}{3}(x - 2) / \cdot 3$$

$$3y + 9 = 4(x - 2) \rightarrow 3y + 9 = 4x - 8$$

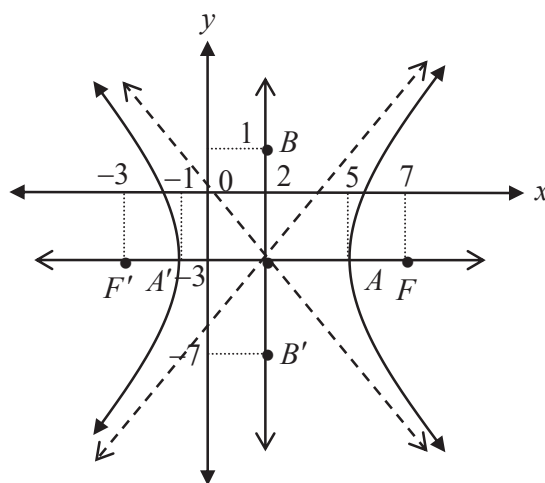
$$3y + 9 - 4x + 8 = 0 \rightarrow -4x + 3y + 17 = 0$$

$$y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$$

$$y - (-3) = -\frac{4}{3}(x - 2) \rightarrow y + 3 = -\frac{4}{3}(x - 2) / \cdot 3$$

$$3y + 9 = -4(x - 2) \rightarrow 3y + 9 = -4x + 8$$

$$3y + 9 + 4x - 8 = 0 \rightarrow 4x + 3y + 1 = 0$$



$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$$

سوال ۱۰: تمام مشخصات هایپر بول را دریافت نموده و گراف آنرا رسم نمایید؟

۴۰

$$y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$$

$$y - 2 = -\frac{-3}{4}(x - (-3))$$

$$\rightarrow y - 2 = +\frac{3}{4}(x + 3) / \div 4$$

$$4y - 8 = 3(x + 3) \rightarrow 4y - 8 = 3x + 9$$

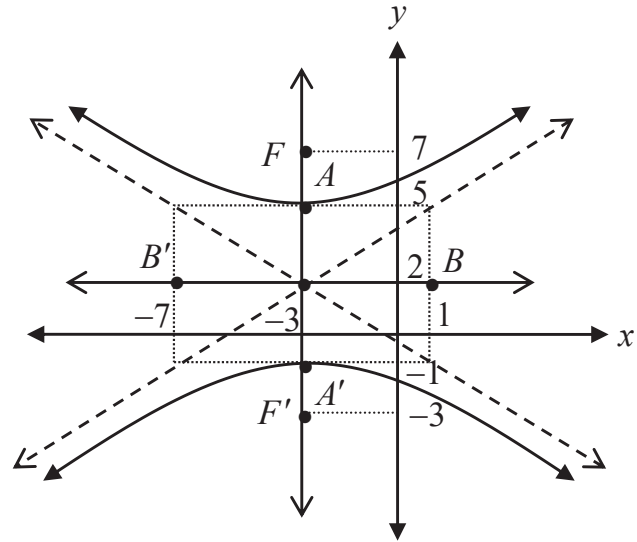
$$\rightarrow 4y - 8 - 3x - 9 = 0$$

$$\rightarrow -3x + 4y - 17 = 0 / \cdot (-1)$$

$$3x - 4y + 17 = 0$$

عن المركزیت هایپربول:

$$e = \frac{c}{a} \rightarrow e = \frac{5}{3}$$



معادلات خطوط موجه:

$$y = +\frac{a}{e}$$

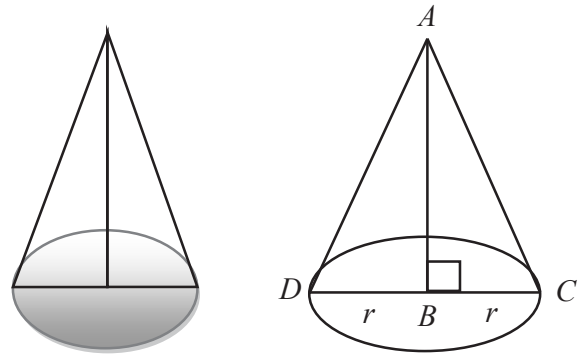
$$y = +\frac{3}{\frac{5}{3}} \rightarrow y = \frac{3}{\frac{5}{3}} \rightarrow y = +\frac{9}{5}$$

$$y = -\frac{a}{e}$$

$$y = -\frac{3}{\frac{5}{3}} \rightarrow y = -\frac{3}{\frac{5}{3}} \rightarrow y = -\frac{9}{5}$$

مخروط و مقاطع مخروطی

مخروط: شکلی که از دوران یک مثلث قائم الزاویه به حول یک ضلع قائم آن تشکیل میشود مخروط گفته میشود.



نقطه A راس مخروط گفته میشود.

خط عمود AB محور مخروط یا ارتفاع مخروط گفته میشود.

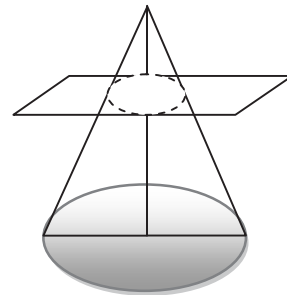
خط مایل AC و AD بنام مولد مخروط یاد میشوند.

قاعده مخروط همیشه یک دایره میباشد.

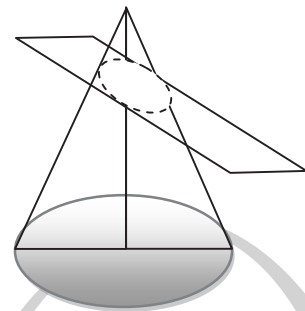
r شعاع قاعده مخروط میباشد.

مقاطع مخروطی

1- هرگاه یک مخروط توسط یک مستوی عمود با محور اصلی قطع شود شکل حاصله عبارت از یک دایره میباشد.

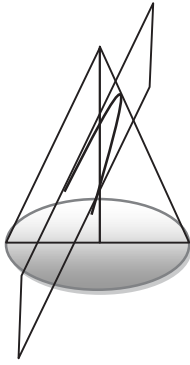


2- هرگاه یک مخروط توسط یک مستوی مایل با محور اصلی قطع شود شکل حاصله عبارت از یک بیضوی میباشد.

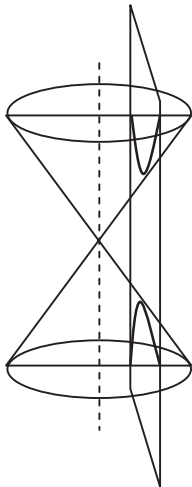


هندسه تحلیلی

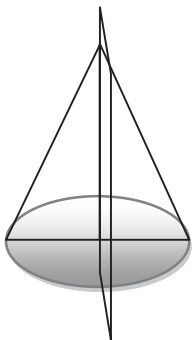
3- هرگاه یک مخروط توسط یک مستوی موازی با مولد مخروط قطع شود شکل حاصله عبارت از یک پارابول میباشد.



4- هرگاه دو مخروط با راس مشترک و قاعده های موازی توسط یک مستوی موازی با محور اصلی قطع شود شکل حاصله عبارت از یک هایپربول میباشد.



5- هرگاه یک مخروط توسط یک مستوی منطبق با محور اصلی قطع شود شکل حاصله عبارت از یک خط مستقیم میباشد.

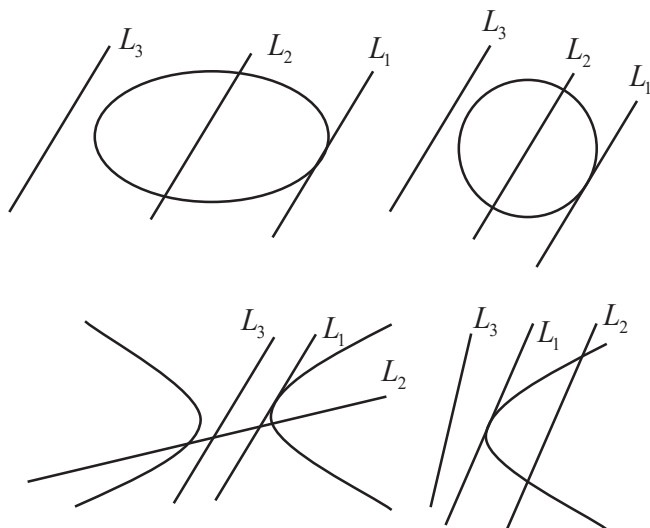


تشخیص معادلات مقاطع مخروطی:

1- اگر ضرایب x^2 و y^2 مساوی باشند معادله از دایره میباشد. بطور مثال:

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 10 = 0$$

$$3x^2 - 2y + 3y^2 = 8$$



L_1 مماس، L_2 متقاطع و L_3 غیر متقاطع میباشند.

هدف از مقاطع مخروطی، دایره، پارابول، بیضوی و هایپربول میباشند.

برای اینکه معلوم شود کدام یکی از حالات فوق وجود دارد، در معادله خط مستقیم قیمت x یا y را محاسبه کرده و در معادله مقطع مخروطی وضع میکنیم.

معادله حاصل شده را به شکل استاندارد تبدیل کرده و دلتا را مطالعه میکنیم. قیمت دلتا حالت خط و مقطع مخروطی را تشخیص میکند.

1- اگر $\Delta > 0$ باشد، خط و مقطع مخروطی در دو نقطه متقاطع اند.

2- اگر $\Delta = 0$ باشد، خط و مقطع مخروطی مماس اند.

3- اگر $\Delta < 0$ باشد، خط و مقطع مخروطی غیر متقاطع اند.

سوال ۱: خط $x - y - 1 = 0$ با پارابولای $y - x^2 + 1 = 0$ در کدام حالت قرار دارد؟

حل سوال:

$$x - y - 1 = 0$$

$$-y = -x + 1 / \cdot (-1) \rightarrow y = x - 1$$

$$y - x^2 + 1 = 0$$

$$(x - 1) - x^2 + 1 = 0$$

$$x - 1 - x^2 + 1 = 0$$

$$-x^2 + x = 0$$

$$-x^2 + x + 0 = 0$$

$$a = -1, b = 1, c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(-1)(0) \rightarrow \Delta = 1 - 0 \rightarrow \Delta = 1$$

$$\frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}y^2 = 0$$

$$-3x^2 + 7x - 3y^2 - 12y = 25$$

$$\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}y^2 - 12x + \frac{1}{3}y = 0$$

2- اگر ضرایب x^2 و y^2 مساوی نبوده تنها هم علامه باشند معادله از بیضوی میباشند. بطور مثال:

$$x^2 + 3y^2 + 4x - 6y = 0$$

$$4x^2 + 8x + 3y^2 = 12$$

$$-3x^2 + 2x - 5y^2 = 4y - 18$$

3- اگر ضرایب x^2 و y^2 مختلف علامه باشند معادله از هایپربول میباشند. بطور مثال:

$$2x^2 + 5y - 2y^2 = 12x$$

$$-x^2 + 4y^2 + 6x - 8y = 0$$

$$3x^2 - 4y^2 = 25$$

$$x^2 - y^2 = 4$$

4- اگر در معادله تنها x^2 و یا تنها y^2 وجود داشته باشد، معادله از پارابول است. بطور مثال:

$$x^2 - 5x + 4y = 12$$

$$-3x^2 + 6y = 10$$

$$3y^2 + 7x = 9$$

$$-5y^2 = 8x - 4$$

5- اگر در معادله نه x^2 و نه y^2 وجود داشته باشد و یا y و x درجه اول باشند معادله از خط مستقیم است.

بطور مثال:

$$3x + 2y - 6 = 0$$

$$-\frac{2}{3}x + 5y - \sqrt{3} = 0$$

حالات یک خط مستقیم با مقاطع مخروطی:

خط مستقیم با مقاطع مخروطی امکان دارد مماس، متقاطع و یا غیر متقاطع (متخارج) باشد.

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = 2, y = 3$$

$$(2)^2 + (3)^2 - 2(2) - 1 = 0$$

$$4 + 9 - 4 - 1 = 0$$

$$13 - 5 = 0$$

$$8 \neq 0$$

$$8 > 0$$

چون طرف چپ بزرگتر از طرف راست است و نقطه در خارج دایره قرار دارد.

سوال ۴: موقعیت نقطه $(0, -5)$ را نسبت به مقطع مخروطی

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

تعیین کنید؟

حل سوال: معادله از هایپربول است.

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$(0, -5) \rightarrow x = 0, y = -5$$

$$\frac{(0)^2}{4} - \frac{(-5)^2}{9} = 1 \rightarrow \frac{0}{4} - \frac{25}{9} = 1$$

$$0 - \frac{25}{9} = 1 \rightarrow -\frac{25}{9} = 1 / .9$$

$$-25 = 9 \rightarrow -25 < 9$$

چون طرف چپ کوچکتر از طرف راست است و نقطه در خارج هایپربول قرار دارد.

چون دلتا مثبت است بناً خط با پارابول متقاطع می‌باشد.

سوال ۲: خط $x - 5 = 0$ با بیضوی $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ در

کدام حالت قرار دارد؟

حل سوال:

$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow \frac{(5-2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{(3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow \frac{9}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$1 + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow \frac{y^2}{4} = 1 - 1 \rightarrow \frac{y^2}{4} = 0 / .4$$

$$y^2 = 0 \rightarrow y^2 + 0y + 0 = 0$$

$$a = 1, b = 0, c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (0)^2 - 4(1)(0) \rightarrow \Delta = 0$$

چون دلتا مساوی به صفر است بناً خط با بیضوی مماس می‌باشد.

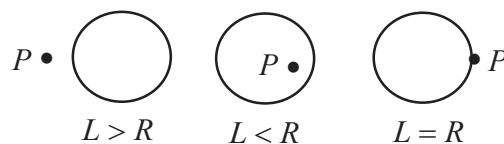
تعیین موقعیت یک نقطه نظر به مقاطع مخروطی:

نقطه داده شده را در معادله مقطع مخروطی وضع میکنیم و قیمت های دو طرف مساوات را باهم مقایسه میکنیم.

1- اگر دو طرف مساوات باهم مساوی باشند، نقطه بالای محیط مقاطع مخروطی قرار دارد.

2- اگر طرف چپ مساوات بزرگتر از طرف راست مساوات باشد. در صورتیکه معادله از دایره، بیضوی و یا پارابول باشد، نقطه در خارج و اگر معادله از هایپربول باشد، نقطه در داخل مقطع مخروطی قرار دارد.

3- اگر طرف چپ مساوات کوچکتر از طرف راست مساوات باشد. در صورتیکه معادله از دایره، بیضوی و یا پارابول باشد، نقطه در داخل و اگر معادله از هایپربول باشد، نقطه در خارج مقطع مخروطی قرار دارد.



Lift به معنی چپ و Right به معنی راست می‌باشد.

سوال ۳: موقعیت نقطه $(2, 3)$ را نسبت به مقطع مخروطی

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$$

تعیین کنید؟

حل سوال: معادله از دایره است.